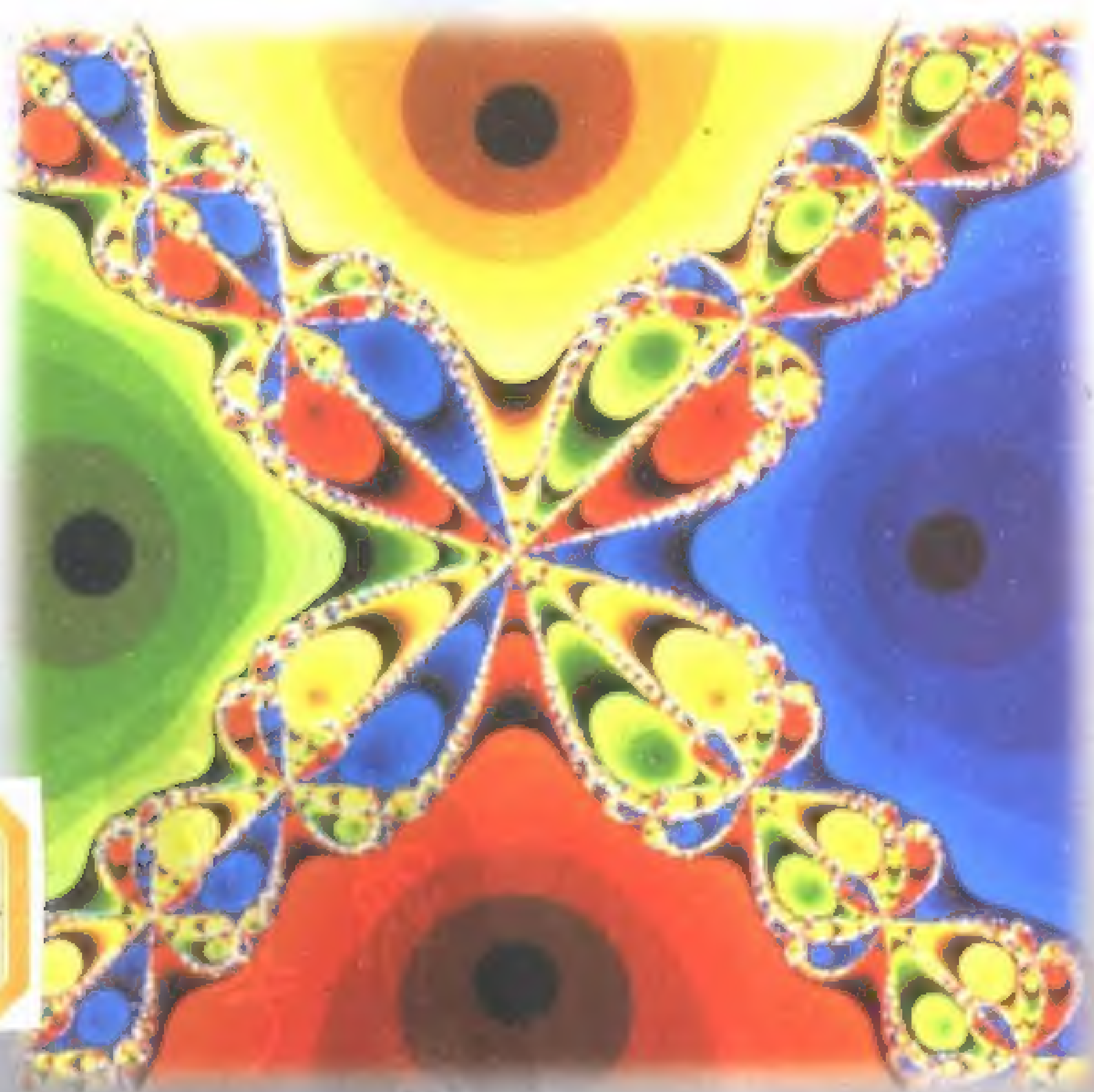
混沌学导论

吴祥兴　陈　忠　等编著



上海科学技术文献出版社

混沌学导论

ISBN 7-5439-0991-X/O · 111 定价：18.50 元

混沌学导论

吴祥兴　陈　忠　等编著

上海科学技术文献出版社

责任编辑：杨浩明
封面设计：何永平

混沌学导论

吴祥兴　陈　忠　等编著

*

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号　邮政编码200031）
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　印张 8.75　字数 235 000
1996年11月第1版　2001年1月第3次印刷
印数：3 001—6 100
ISBN 7-5439-0991-X/O·111
定价：18.50元

序

混沌学的研究，自本世纪70年代掀起热潮以来，其触角频频伸向自然和社会的各个学术领域。进入80年代，"混沌"一词尤如"精灵"一般越出了学术界的疆界，在社会和生活领域不断地诱发出阵阵骚动和奇想，启发出解决问题的新思路。整个80年代，丰硕的研究成果界定了明确的研究对象，构筑了系统的理论结构以及制订了较为完整的方法论框架，为创立混沌学新学科奠定了基础。待到90年代，混沌的同步与控制、混沌规律的运用等又取得了突破性的进展。当前，混沌学的研究正以审慎的姿态，踏实地向深度和广度进一步推进。

现今《混沌学导论》一书的出版，恰当其时。此"导论"既是前20余年研究轨迹的勾勒，又是进一步研究方向的启示；既能推动研究队伍的振奋，又能有助于后起之秀的培养。

近年来，在诸多的混沌学论著之中，这部《混沌学导论》有其独到的特色。

一是论述深浅适度，既可作为教科书，也可作为初学者的入门书。对混沌有兴趣而又陌生的读者，甚或其他学科或行业的专家，面对混沌的旋风，既渴望了解，又难"寒窗十年"。《混沌学导论》正适其用，既不过于深邃，又不陷于科普。

二是论述自成体系。《混沌学导论》从学科产生的背景开始，定位于非线性的科学范畴，介绍普遍存在的混沌现象，揭示其内在的规律和定性定量的特征，按其简繁程度有层次地推进，提示热点和前沿，从而构成了一个规正的体系。

三是勇于导向学科研究的前沿。混沌学发展迅速，不断涌现诸多新的成果。《混沌学导论》的作者凭借多年研究的底蕴，勇于向读

者介绍至今尚未成熟的内容，启示学科前沿，引导探索未知，实乃应予创导的风范。

《混沌学导论》的出版，我相信会得到读者的欢迎；同时，我也相信读者的批评和建议同样会得到作者的热情欢迎，共享前进的欢乐。

王沅尘

1996年8月于

上海交通大学

前　言

对混沌现象的理论探索，自本世纪70年代初掀起热潮以来，已经经历了20多个年头，至今仍方兴未艾。混沌学这门新学科，其研究领域的深广，攻关气势之磅礴，振撼着整个学术界。混沌学研究会聚了世界上一大批优秀学者，发表了数以千计的科学论著，吸引了众多的科技工作者和青年学生。

迄今为止，虽然在国内已有多本混沌学的专著、译作问世。但是基于下述思考，我们还是决定将这本《混沌学导论》奉献给读者。其一，混沌研究业已表明，混沌是自然界与人类社会中普遍存在的运动形态，对它的研究无论是对现代科学技术还是社会经济系统都有重大的理论价值和实践意义。为了使初学者对这一领域有一个较为系统的了解，而不至于在茫茫的文献堆中迷失方向，提供一本既非专论，又高于科普的《混沌学导论》是非常必要的；其二，混沌学作为一门极有发展前途的交叉新学科，一些研究生专业甚至有的本科专业已先后开设了有关混沌学的必修和选修课，编写合适的教材或教学参考书已经提到议事日程，这本《混沌学导论》可以作为这方面工作的一个尝试；其三，混沌学目前的研究重心，已转向无限维动力系统中的混沌、时空混沌以及混沌控制等方面。这种由巨大社会需求和理论探索热情驱使下的高速发展，必须要有较系统的基础理论垫铺，《混沌学导论》可以为攀登者提供一个起步的台阶。有鉴于此，我们编著的这本《混沌学导论》力求体现以下特点及要求：第一，介绍混沌学的主干，精练而不失全面；第二，作为教材或教学参考书，由浅入深，易读而不失严密；第三，既非限于论述某一方面的专门研究成果，也非一般的混沌学资料汇编，而是在精选资料的基础上，根据我们的理解和研究重新组合，构建一个比较科学的叙述新学科的结构体系，体现出“组合即创新”的原则；

第四，对时空混沌和混沌控制等最新进展也作了较详细的介绍，将读者直接引向学科发展的前沿。总之，我们力求使《混沌学导论》能真正起到引导的作用。

《混沌学导论》的编著是由吴祥兴、陈忠拟订编写提纲，撰写人员分工执笔，其中第一章、第七章由上海师范大学吴祥兴执笔；第五章、第六章由上海交通大学陈忠执笔；第二章、第三章由上海师范大学陆剑虹执笔；第四章由上海财经大学章琪执笔。全书由吴祥兴统稿。陆剑虹绘制了大部分插图。

上海交通大学管理学院副院长、系统工程研究所所长、博士生导师王浣尘教授审阅了全部书稿，并为本书作序。

诚然，由于混沌学本身正处在迅速发展中，理论结构尚未成熟，编著者的学识水平又有限，再加上时间仓促，不当之处在所难免，恳请有关专家和广大读者批评指正。

编著者

1996 年 5 月于上海

目　　录

第一章 引　　言

一门新学科的创立，不仅是理论进步的结果，而且是生产发展的需要和社会实践认识的必然。与此同时，还可能预示着一场深刻的科学革命。人们认为，开始于 70 年代初的混沌学研究，正以其广度和深度的磅礴气势，揭开了物理学、数学乃至整个现代科学发展的新篇章。混沌学的创立，将在确定论和概率论这两大科学体系之间架起桥梁，它将改变人们的自然观，揭示一个形态和结构崭新的物质运动世界。二十多年过去了，混沌学仍在迅速发展并逐步走向成熟。混沌学给学术界带来的巨大震撼是无庸置疑的，它将以其丰硕的研究成果和对社会的深刻影响确立自己在科学史上应有的地位。

第一节　混沌学的兴起

一、混沌学的早期探索及知识积累

混沌学的研究热潮仅始于 70 年代初期，但这门新学科的渊源却可以追溯到上个世纪。

19 世纪的自然科学取得了重大发展，为突破牛顿理论体系，迎接 20 世纪初的伟大科学革命准备了知识基础。同时，在思维方式上，理论自然科学向辩证思维复归这一历史性潮流，也为新学科的创立提供了认识论工具。

19 世纪 30 年代，英国数学物理学家 W. R. Hamilton 将动力学系统的能量表示为广义动量和广义坐标的函数。设系统具有 N 个自由度，则以 N 个广义动量和 N 个广义坐标组成 $2N$ 维的相空间，运动方程的解即为相空间中的曲线，称为轨道。这样，牛顿力学变成了相空间的几何学，几何方法成了研究动力学系统的有力工

具。按照 Hamilton 函数的数学形式,可以把动力学系统划分为可积和不可积两大类。这一划分使人们逐步认识到,经典牛顿理论实际上只是关于可积系统的理论,而一般的动力学系统,包括多体甚至仅三体问题都是不可积的。这一认识是通向混沌学大门的重要一步,因为混沌正是不可积系统的典型行为。

公认为真正发现混沌的第一位学者,是伟大的法国数学、物理学家 H. Poincaré。他是在研究天体力学,特别是在研究三体问题时发现混沌的。他以太阳系的三体运动为背景,证明了周期轨道的存在。他在详细研究了周期轨道附近流的结构,发现在所谓双曲点附近存在着无限复杂精细的"栅栏结构"。他发现了三体引力相互作用能产生出惊人的复杂行为,确定性动力学方程的某些解有不可预见性,这就是我们现在讲的动力学混沌现象。当 H. Poincaré 意识到当时的数学水平不足以解决天体力学的复杂问题时,就着力于发展新的数学工具。他与 Lyapunov 一起奠定了微分方程定性理论的基础;他为现代动力系统理论贡献了一系列重要概念,如动力系统、奇异点、极限环、稳定性、分叉、同宿、异宿等;提供了许多有效的方法和工具,如小参数展开法、摄动方法、H. Poincaré 截面法等。他所创立的组合拓扑学是当今研究混沌学必不可少的工具。现代动力系统理论的几个重要组成部分,如稳定性理论、分叉理论、奇异性理论和吸引子理论等,都发源于 H. Poincaré 的早期研究。还有回复定理、遍历理论、概率思想等等,这一系列数学成就对以后混沌学的建立发挥着广泛而深刻的影响。

同时,H. Poincaré 的科学哲学思想也为发现混沌清除了一大理论障碍。他明确地提出了偶然性的客观意义,他认为"偶然性并非是我们给我们的无知所取的名字","对于偶然发生的现象本身,通过概率运算给予我们的信息显然将是真实的"[1]。从这一认识出发,他鲜明地批判了"绝对的决定论",认为精确的定律并非决定一切,它们只是划出了偶然性可能起作用的界限[2]。特别应该提出的是 H. Poincaré 在本世纪初就发现了某些系统对初值具有敏感依赖性和行为不可预见性,他在《科学的价值》一书中写道:"我们觉

察不到的极其轻微的原因决定着我们不能不看到的显著结果，于是我们说这个结果由于偶然性。……可以发生这样的情况：初始条件的微小差别在最后的现象中产生了极大的差别；前者的微小误差促成了后者的巨大误差，于是预言变得不可能了。"[3]这些描述实际上已经蕴含了"确定性系统具有内在的随机性"这一混沌现象的重要特性。

诚然，混沌现象是一种极其复杂的运动形态，H. Poincaré 时代尚不具备建立混沌学的足够的数学工具和其他准备知识，但 H. Poincaré 的科学贡献已为人们打开了一个观察混沌新世界的窗口。

在 H. Poincaré 之后，一大批数学家和物理学家在各自的研究领域所做的出色工作为混沌学的建立提供了宝贵的知识积累。如 G. D. Birkhoff 在动力学系统的研究中于 1917 年至 1932 年间发表了一系列论著，他在 Hamilton 微分方程组的正则型求解、不变环面的残存等问题上，在对不可积系统的轨道特征，对遍历理论都有重要贡献。他在研究有耗散的平面环的扭曲映射时，发现了一种极其复杂的"奇异曲线"，这实际上就是混沌中的一种奇怪吸引子。与此同时，数学领域还发现了一批分形几何对象，并导致了分形几何学的建立。概率论经过公理化而成了现代数学的标准组成部分，分析、代数、几何，以致最抽象的数论都在为当今的混沌研究准备工具。遍历理论也在经过了长期的积累后取得重大进展，数学家们发现了不同层次的遍历性，分别代表不同类型的复杂系统。同时，弄清了一批具体系统的遍历性和非遍历性，相应地建立了区分复杂和简单系统的定量判据，遍历理论终于成为当今研究复杂系统的强有力武器。

早期混沌研究的一个重要阶段是把 H. Poincaré 的拓扑动力学思想推广应用于耗散系统。最早的工作开展在电工学领域，1918 年 G. Duffing 对具有非线性恢复力项的受迫振动系统进行了深入研究，揭示出许多非线性振动的奇妙现象，他的标准化的动力学方程称为 Duffing 方程，即

$$\ddot{x}+k\dot{x}+f(x)=g(x) \tag{1.1.1}$$

其中 $f(x)$ 含三次项，$g(x)$ 为周期函数。同时期荷兰物理学家 B. Vanderpol 研究三极管振荡器，建立了著名的 Vanderpol 方程：

$$\ddot{x}-k(1-x^2)\dot{x}+x=b\lambda k\cos(\lambda t+\varphi) \tag{1.1.2}$$

Duffing 方程和 Vanderpol 方程都是现代混沌学文献中的典型方程。

早期混沌探索的一个突出成果是在生态领域，经过数代人的努力提炼出了 Logistic 方程：

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n) \tag{1.1.3}$$

这是描述生物种群系统演化的典型模型，常称为虫口模型。

另外，在生理学领域、物理学领域都发现了特殊的非周期现象，在经济学界也积累了大量的看来杂乱无章的数据。所有这些都成了近代混沌学研究极有价值的知识积累。

二、混沌学研究的重大突破

经历了漫长的知识积累，到了本世纪五、六十年代，混沌现象在众多的学科领域被发现，学者们针对各类混沌也建立了各种特殊的数学处理方法。

混沌学研究的第一个重大突破，发生在以保守系统为研究对象的天体力学领域，KAM 定理被公认为创建混沌学理论的历史性标记。

在天体力学领域，不仅有始于 Poincaré 的混沌探索良好传统，也由于在这一领域与混沌轨道的复杂图象相匹配的数学手段已基本具备，前苏联学者 A. N. Kolmogorov 以及以他为首的实力强大的苏联学派应运而生。Kolmogorov 是超越同时代人的佼佼者，他以《概率论的基本概念》、《概率论的解析方法》等名著奠定了现代概率论的基础；他建立了现代拓扑学主要分支的上同调理论，掌握了对混沌学研究极具重要价值的拓扑学方法；在湍流研究中提出了著名的 Kolmogorov 三分之二定理；在遍历理论方面引入了测度熵概念，成功地解决了流的同构问题；在复杂性问题的探索中，把复杂性和随机性概念在算法理论的基础上统一了起来。所

以，他具备了突破描述保守系统复杂性行为所需的一切必要的知识基础。1954 年 Kolmogorov 在阿姆斯特丹国际数学大会上宣读的论文《在具有小改变量的 Hamilton 函数中条件周期运动的保持性》，被公认为是具有划时代意义的科学文献。他研究了解析 Hamilton 系统的椭圆周期轨道的分类，发现了一个充分接近可积 Hamilton 系统的不可积系统，对此系统若把不可积当作可积 Hamilton 函数的扰动来处理，则在小扰动条件下，系统运动图象与可积系统基本一致；当扰动足够大时，系统图象就发生了性质改变，成了混沌系统。1963 年，Kolmogorov 的学生，年轻的、具有超群才华的 V. I. Arnold 对此作出了严格的数学证明。差不多同时间，瑞士数学家 J. Moser，对此给出了改进表述，并独立地作出了数学证明。KAM 定理就是以他们三人名字的首位字母命名的，这是一个多世纪以来人们用微扰方法处理不可积系统所取得的最成功的结果，具有极为重要的理论价值。我国著名的混沌学权威学者郝柏林院士称 KAM 定理是"牛顿力学发展史上最重大的突破"[4]，KAM 定理被国际混沌学界公认为这一新学科的第一个开端。

混沌学研究的第二个重大突破，发生在遍布于现实世界的耗散系统。作出杰出贡献的学者是美国气象学家 E. N. Lorenz。Lorenz 虽是从事天气预报工作的气象学家，但数学功底十分扎实，在五、六十年代，人们普遍认为气象系统虽然非常复杂，但仍是遵循牛顿定律的确定性对象，在有了计算机以后，天气状况可以精确预报。大数学家、计算机之父 Von Noumann 甚至认为天气状况可以改变和控制。1962 年 B. Saltzman 通过简化流体对流模型得到了一个完全确定的三阶常微分方程组。当时，Lorenz 把它作为大气对流模型，用计算机做数值计算，观察这个系统的演化行为。在计算观察中，确实看到了这个确定性系统的有规则行为，同时也发现了同一系统在某些条件下可出现非周期的无规则行为，这是与当时气象界的权威观点相矛盾的，但却与 Lorenz 的经验和直觉相符合，因为长期天气预报确实始终没有获得过成功，这就是有趣

的“蝴蝶效应”。通过长期反复的数值实验和理论思考，Lorenz 以巨大的勇气向传统理论提出了挑战，揭示了计算机模拟结果的真实意义，在耗散系统中首先发现了混沌运动。1963 年发表了著名论文《确定性非周期流》，以后又陆续发表了三篇论文，这组论文是混沌研究的第二大突破，成了后来研究耗散系统混沌现象的经典文献。Lorenz 揭示了一系列混沌运动的基本特征，如确定性非周期性、对初值的敏感依赖性、长期行为的不可预测性等，他还在混沌研究中发现了第一个奇怪吸引子——Lorenz 吸引子，他为混沌研究提供了一个重要模型，并最先在计算机上采用数值计算方法进行具体研究，为以后的混沌研究开辟了道路。

三、混沌学研究的世界性热潮[5]

混沌学研究世界性热潮的到来是以数学家和物理学家分离了几十年后重新结合为标志的。30 年代数学家和物理学家的分离，对于时机尚未成熟的混沌研究来说，让出了数学积累的时间。如前所述，那段时间在数学的抽象思维中，拓扑学、泛函分析、整体分析、微分几何、微分流形等分支迅速发展起来，分析学在描述间断性、奇异性、整体性、非线性特性等方面都有很大发展。概率论的建立，遍历理论的进展，分形几何的问世，都直接、间接地为混沌学的研究提供了有力的数学工具。但是仅有拓扑动力学和微分方法稳定性理论等工具还不足以有效地描述动力系统的复杂行为。拓扑方法便于描述系统整体特性，但在不具备可微性的拓扑空间上，描述时间演化的动力学特性却受到很大限制。从 60 年代初起，S. Smale、D. V. Anosov、廖山涛等一批拓扑学家将拓扑学和常微分方程定性理论结合起来，在拓扑空间引入可微性、微分结构等概念，建立了一门崭新的数学分支——微分动力系统理论，以微分流形为相空间，引入回复性与非回复性、游荡集与非游荡集（Ω 集）等概念，处理了动力系统整体结构稳定性问题，成了探索混沌奥秘的最有效的数学工具之一。这一理论的突出优点是其物理背景十分明确，就是用来处理动力系统的复杂现象，从非线性振子这一类物理学家十分熟悉的问题着手进行数学抽象，为物理学家提供了解

决搁置近70年的问题的合适工具，数学家和物理学家在对混沌现象的深入研究中重新结合了起来。

在物理学界，60年代兴起的非线性、非平衡态热力学相变临界态理论等物理学新领域的研究成果，不仅使杰出的耗散结构理论创始人 I. Prigogine 和 K. Wilson 等人分别获得了诺贝尔化学奖和物理学奖，而且表明物理学中我们所生活的宏观层次问题的研究大有可为。Wilson 用重正化群方法处理临界现象的开创性工作，对于混沌研究作出了重要的方法准备。差不多同时期兴起的系统科学，提倡横向的跨学科研究，探索远离平衡态的、非线性的、不可逆的、自组织的客观过程，创造处理复杂性、不确定性、演化特性的新方法。系统科学提供的一整套新观点和新方法，使混沌学研究获得了强大的活力。70年代初开始，混沌学研究终于在多个学科领域同时展开，形成了世界性研究的热潮。

1971年，法国的数学物理学家 D. Ruelle 和荷兰的 F. Takens 联名发表了著名论文《论湍流的本质》[6]，在学术界第一个提出用混沌来描述湍流形成机理的新观点，并证明了 Lev D. Landau 关于湍流发生机制的权威理论的不正确性，起了重要的解放思想的作用。他们通过严密的数学分析，独立地发现了动力系统存在一套特别复杂的新型吸引子，描述了它的几何特征，证明与这种吸引子有关的运动即为混沌，发现了第一条通向混沌的道路。并命名这类新型吸引子为奇怪吸引子。确立了他们在混沌学发展史上的显赫地位。此后，判别是否存在奇怪吸引子，刻划这种吸引子的特征，成了耗散系统混沌研究的基本课题。

生物学家，特别是种群生态学家，对建立混沌学有着特殊贡献，他们在研究种群演化的动力学材料中建立的 Logistic 方程的数学模型，是70年代以来研究混沌十分理想的典型"标本"。作为杰出代表的 R. May，1971年起从研究理论物理转向研究生物学，他用数值计算研究虫口模型，既看到了规则的周期倍分叉现象，也看到不规则的"奇怪现象"，同时还发现随机运动中又会出现稳定的周期运动，这一系列现象无法归咎于计算机的误差，虽然其中的

机制并不清楚，但深受震惊的R. May确信现象背后必定隐藏着未被认识的规律。R. May的发现对混沌现象的深入研究有着巨大的促进。

MSS定理的建立是这一时期另一项颇有价值的工作，MSS定理是一个有关单峰映射周期轨道的定理。三位学者(N. Metropolis，M. L. Stein，P. R. stein)把符号动力学引人混沌研究，为根据计算结果和实验数据确认周期解以及周期轨道分类和排序提供了方便的工具。

1975年，正在美国马里兰大学攻读博士学位的华人李天岩和他的导师J. Yorke联名发表了一篇震动整个学术界的论文《周期3蕴含混沌》[7]，这是一个关于混沌的数学定理。基本思想是Yorke受Lorenz1963年的论文启发面得，李天岩给出了具体证明，这就是著名的Li-Yorke定理。定理描述了混沌的数学特征，为以后一系列的研究开辟了方向。李天岩和Yorke在动力学研究中率先引入“混沌”(chaos)一词，为这一新兴研究领域确立了一个中心概念，为各学科研究混沌现象树起一面统一的旗帜。Yorke坚信“混沌”一词能代表这一研究领域的基本精神。由于Yorke继续进行了一系列出色的工作，终于成了创立混沌学的少数著名学者之一。

Li-Yorke定理帮助R. May理解了他在Logistic方程中发现的奇异现象，他认识到了这是隐藏在生态系统中的具有普遍特征的混沌，从而撇开了各个具体领域的特殊性，总结和阐明了一个基本事实：简单的确定性非线性差分方程，可以产生出从平衡态到周期态再到混沌态的整个动力学行为。1976年R. May发表了题为《具有复杂动力学过程的简单数学模型》综述文章，以单峰映射为对象，重点讨论了Logistic方程：$x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$，系统地分析了方程的动力学特征，考察了混沌区的精细结构，绘制了分叉轮廓图，汇集了敏感函数、周期窗口、树枝分叉、切分叉、基本动力学单元、不动点谐波等混沌学词汇，促进了不同领域混沌学研究连成一体，也为这一领域研究的新涉足者提供了一条有效的通道。

法国天文学家M. Henon在混沌研究热潮的影响下，从研究

保守系统转向耗散系统，1976年通过对 Lorenz 方程的简化，得到了 Henon 二维映射。他用计算机实验研究这个模型，证明如此简单的平面映射，也能像 Lorenz 方程那样产生混沌运动，发现奇怪吸引子。并依据数值计算绘制出了这个吸引子，研究了它的复杂结构特征。所有这些工作使 Henon 在混沌学研究中占有重要地位。

混沌学研究的又一功臣是分形学创始人法国数学家 B. Mandelbrot。混沌运动在相空间的复杂图象，表明传统几何学的局限，需要创造新的几何工具。1967年，年轻的 Mandelbrot 在国际权威的美国《科学》杂志上提出了“英国的海岸线有多长?”这一新奇的问题，出人意料的回答却是“不确定的”，它取决于测量时所用的尺度。在此文中明确地表述了他的分形思想，1973年他在法兰西学院讲学时又正式提出分形与分形几何的概念。随后相继出版了《分形对象——形、机遇和维数》、《分形——形、机遇和维数》、《自然界的分形几何学》等专著，奠定了分形研究的基础。Mandelbrot 的工作为混沌探索者们描绘种种不规则的、回转曲折的相空间轨道以理想的工具，强有力地推动混沌研究走向高潮。

70年代中期开始，实验物理学家也纷纷加入混沌学研究者的行列，开创了混沌学家实验研究的新局面。走在前面的是一批具有流体相变研究功底的流体实验学家。1974年 Ahlers 在低温下观察了液氦的失稳过程，同年 J. P. Gollub 和 H. L. Swinney 在实验中间接证明奇怪吸引子是流体流动中随机性的来源。而后他们都致力于实验观察混沌的研究工作，初步证明了混沌决不是一堆有趣的数学现象，而是客观存在的事实，这在混沌学研究中具有十分重大的意义。同时期，美国加州大学克鲁兹分校的物理学家 R. S. Shaw、N. Packard、J. Farmer 和 J. P. Crutchfield 等用各种形状的龙头流水进行实验，独立地开展了混沌研究，同样证实了混沌的客观性，他们创造了一种从实验数据中重构奇怪吸引子的技术，并将混沌与信息联系起来，用信息论的观点对混沌机制提出了一种理论解释。

美国物理学家 M. J. Feigenbaum 的研究，以其杰出的成果为

混沌学跻身于现代科学的行列打下了基础。才华横溢，有着独特思维方式的 Feigenbaum，对粒子物理、量子场论、临界态理论以及相关的数学工具都有深入的研究，但对混沌学的研究却起步较晚。70年代初以来一批学者通过迭代过程发现倍周期分叉导致混沌的研究成果，引起了他的极大兴趣；同时，奇怪吸引子等新发现又促使他思考确定性系统是怎样表现出难以捉摸的随机性质的。这些随机性质能否具体计算？Feigenbaum 依赖于他扎实的数学理论功底，以坚韧不拔的精神，历时数年的研究，终于发现了倍周期分叉过程中分叉间距的几何收敛性。并发现了收敛速率即每次缩小的倍数为 4.6692……是个常数，这就是著名的 Feigenbaum 常数。Feigenbaum 还把相变临界态理论中的普适性、标度性、重正化群方法引入混沌研究，计算出了一组新的普适常数，建立了关于一维映射混沌现象的普适理论，发现了怎样作尺度变换，给出了一条走向混沌的具体道路，把混沌学研究从定性分析推进到了定量计算的阶段，成了混沌学研究的一个重要的里程碑。

在保守系统方面的工作，人们主要致力于阐述 KAM 定理的深刻含义。1964 年法国天文学家 Henon 和他的荷兰学生 C. Heiles 用数值计算方法研究了有两个自由度的 Hamilton 系统：

$$H=\frac{1}{2}(P_1^2+P_2^2+q_1^2+q_2^2)+q_1q_2^2-\frac{1}{3}q_1^3 \tag{1.1.4}$$

在低能级范围内只发现周期轨道，但当能级提高时，却发现了意想不到的运动图象，他们从 Poincaré 著作的拓扑学思想中得到启发，深信这类复杂运动图象的数学实质是动力学系统的一类尚未认识的复杂行为，他们以数值实验为基础描绘了这种运动图象的深层结构，为物理学界消化 KAM 定理积累了宝贵的资料。而后，从 60 年代末到 70 年代末，物理学家 G. H. Walker、J. Ford、G. H. Lunsford 等人通过数值实验获得了有关保守系统混沌运动图象的大量形象化材料。Arnold 和 Moser 又进一步推进了对混沌的数学分析。K. J. Whiteman 又从物理学角度对混沌作了浅近的通俗说明。这一系列的工作使 KAM 定理和保守系统的混沌为更多人

所了解。1977 年夏天，物理学家 J. Ford 和 G. Casati 在意大利科莫组织了关于混沌研究的第一次国际性科学会议，进一步营造了混沌研究的氛围，促进了混沌学研究的世界性热潮。

自 1975 年开始，“混沌”(chaos)作为一个新的科学名词在文献中出现，到 80 年代初，混沌研究已发展成为一个具有明确的研究对象和基本课题、独特的概念体系和方法论框架的新学科。关于这门新学科，1983 年物理学家 M. Berry 提出了混沌学(chaology)这个名称，并已逐渐为科学界所接受。80 年代以来混沌学研究出现了更大的热潮，《科学美国人》、《科学》、《新科学家》、《自然》等杂志纷纷介绍混沌理论，专业学术刊物包括我国的《物理学报》、《物理学进展》等也大量刊登混沌学研究的论文。20 多年来，混沌研究的论文发表了 7000 多篇，出版了专著和文集近 300 部，其中也包括了以郝柏林院士为代表的一大批我国学者的研究成果。如今，对混沌现象的认识，是非线性科学最重要的成就之一，混沌概念与分形、孤立子、元胞自动机等概念并行，成为探索复杂性的重要范畴。

第二节　混沌的概念与定义

一、混沌概念的演化

“混沌”或“浑沌”一词最早在中国和希腊的神话故事中出现，以后随着人类文明的进步，文化和科学的发展，“混沌”一词被中外的文学、艺术、宗教典籍和科学著作所不断采用。“混沌”在英文、法文、德文中都写作“chaos”，在俄文中写作“xaoc”，都来源于希腊文“χaos”。到了近代，尤其是近几年，“混沌”一词以极高的频率出现在各类报刊文章、文献著作中。几千年来，混沌的词义在不同的地域文化背景和不同的学科领域有着不同的内涵，混沌概念也在不断演化。其演化的过程和阶段大致可分为古代理解的混沌、一般科学混沌涵义和具有严格定义的非线性动力学混沌三个层次。

古代理解的混沌(浑沌)主要是描述一种自然状态及其演化。混沌是古代思想家关于宇宙起源的重要概念。众多古籍一般都把

混沌作为宇宙天地开辟之前的一种状态。《三五历》中说:"未有天地之时,混沌如鸡子,盘古生其中,万八千岁,天地开辟,阳清为天,阴浊为地"。《论衡·天篇》中说:"元气未分,浑沌为一"。《易纬·乾凿度》中说:"混沌者,言万物相混成而未相离"。由此可见,混沌状态的主要特征是浑然一体。但此一体是一个蕴含着万物的整体。《易纬·乾凿度》还认为宇宙生成之前的状态也有一个演化过程,经历了不同阶段才到达混沌:"太易者,未见气也。太初者,未见始也。太始者形之似也。太素者,质之始也。气似质具而未相离,谓之混沌"。古埃及、古希腊的思想家极早就有世界起源于混沌的观点,古希腊神话诗人赫西俄德(约公元前8世纪)在《神谱》中说:"万物之前先有混沌,然后才产生宽阔的大地"。这和中国古代的认识极为接近,世界是演化来的,世界产生之前的状态为混沌。古希腊的自然哲学观点还认为世界演化的最终结局也是混沌,世前的称原始混沌,世后的称终极混沌。对西方文化起着重要影响的《圣经》也讲到混沌,《旧约全书》创世纪第一章第一句就说:起初上帝创造天地。地是空虚混沌,渊面黑暗;上帝的灵运行在水面上。上帝说:'要有光',就有了光。上帝看光是好的,就把光暗分开了。……有晚上,有早晨,这是头一日。"宗教信奉上帝创造天地,但《圣经》的字里行间还是隐含了人们的天地由混沌演化而来的观念。古代哲学家还将混沌概念作为对一种思维方式的描述,即为在人类认识发展过程中条理分明的认识阶段之前浑浑噩噩的朦胧状态,现代哲学家还确认这是人类思维发展中的一个重要环节,称为混沌思维,等等。可见,在古代,虽然对混沌的概念没有统一的、严格的定义,但东西方一般都将混沌作为一种自然状态,一种演化形态,一种思维方式。

到了近代,混沌概念随着科学的发展逐渐演化。近代科学以牛顿力学为旗帜。然而牛顿力学是关于运动的学说,而不是关于演化的理论。牛顿及其追随者抛弃了古希腊学者朴素的辩证思想,把混沌与混乱、无规等同,否认宇宙起源于混沌的观点,他们认为宇宙创生之前的唯一存在是上帝,从上帝施加第一推动力的时刻起,宇

宙就成了像钟表一样的一个动力学系统，处于遵循牛顿定律的、确定的、和谐有序的运动中。由于牛顿力学的巨大成功和决定论观点的严重影响，致使混沌在近代科学兴盛发展的整个时期几乎被排除在科学研究的对象之外。

近代的哲学家们，尤其是形而上学的唯物论者，以18世纪伟大的唯物主义者，法国的D. Diderot为代表，从哲学上否定了混沌的客观意义。他宣称："在一般的及抽象的意义之下，行星系统、宇宙也就只是一个弹性物体：混沌是不可能的"[8]。伟大的德国哲学家康德，虽然也与牛顿一样企图以自然科学成果去论证上帝的存在，但他坚持辩证思维，坚持演化观点，认为宇宙起源于"原始混沌"。他试图把秩序和混沌调和起来，认为大自然即使在混沌中，也只能有规则、有秩序地进行运动。可以看出，他力图以自然科学知识去丰富古代的混沌观。

科学发展到19世纪，虽然牛顿理论仍占主导地位，但Laplace等人对星云假设的科学论证，特别是达尔文的进化论，有力地促使古希腊和中国古代的演化思想重新为科学界所接受。热力学是首先讨论混沌的自然科学学科。热力学理论的创立，热力学第二定律的发现以及对热平衡态的深入研究，为古代学者关于宇宙原始混沌的猜测提供了科学论证。19世纪末，20世纪初，以量子论和相对论的创立为标志的科学大革命，把人们的认识引向了微观和宇观的层次，从而在这些领域结束了牛顿力学的支配地位。从Bohr、Heisenberg到汤川秀树(Yukawa)、Prigogine，一批现代科学的杰出人物，为解决他们所面临的重大理论课题，纷纷研究古代的尤其是中国的哲学思想，古代混沌观就是被重视的一个重要方面。

在基本粒子物理学领域，随着新的基本粒子不断被发现，促使人们思考这些粒子的背后到底是什么？诺贝尔奖获得者，日本著名理论物理学家汤川秀树从中国古代庄子思想中得到启示，曾提出物质最基本的东西不是基本粒子，而是混沌，这种混沌没有固定的形式，却具有分化出一切基本粒子的可能性。后来汤川秀树又提出了一个大胆的物理假设：混沌可能是把基本粒子包裹起来的时间

和空间。他还把庄子寓言中的倏与忽理解为对立的两极，把混沌理解为两极相遇的统一体，可以认为这是把古代混沌观和现代科学联系起来的典型事例。

现代宇宙学的发展，也对混沌概念的深化和科学解释作出了贡献。被越来越多的人们所接受的"大爆炸"理论认为，宇宙是在大约150亿年以前，从基本上处于热平衡态的、浩瀚的、炽热而稠密的物质"大爆炸"中形成。这炽热而稠密的物质状态，可以认为便是"原始混沌"。从这原始混沌出发，随着它急剧膨胀、冷却，逐渐衍生成众多的星系、星体、行星，直到出现生命，成为现在的宇宙。现代宇宙学提出的这种演化的理论模型，赋予原始混沌概念以现代的科学涵义。同时，由于发现了引力的自组织作用，现代科学拥有充分的根据断言，宇宙决不会走向古代学者提出的、经克劳修斯用热力学语言论证的、热寂式的"终极混沌"状态。

混沌概念最为深刻的演化与进展，发生在研究宏观世界的动力学中。由于牛顿理论的巨大影响，本世纪60年代之前，人们仍普遍认为，确定性系统的行为是完全确定的、可以预言的。不确定性行为只会产生在随机系统里。然而，近30年来的研究成果表明，绝大多数确定性系统都会发生奇怪的、复杂的、随机的行为。随着对这类现象的深入了解，人们与古代的混沌概念相联系，就把确定性系统的这类复杂随机行为称为混沌。动力学系统所称的混沌既不等于日常用语和一般科学中所说的混沌，也与粒子物理学家把混沌作为一种物理假设不同，而是一个有严格定义的、可用数学工具精确描绘的科学概念。现在，"混沌"这个在中外文化历史上源远流长的词汇随着非线性动力学研究的深入，已经成为一门新学科的名字，一个尚待研究开发的、有着巨大影响的新领域。

如前节所述，H. Poincaré 是真正发现混沌的第一人，但他没有提出混沌概念。在混沌学文献中较早引入"混沌"(chaos)这个概念的是华人学者李天岩和他的导师美国数学家 Yorke，他们首次提炼出了混沌概念的数学表述。因此，加深了对现代混沌概念的深刻理解。Yorke 坚持认为，混沌一词能代表正在成长的确定性无序

的整个事业。中国混沌学研究的杰出代表郝柏林院士特别强调混沌的科学涵义不是简单的无序，"它可能包含着丰富的内部结构"，他指出："正因为这个缘故，我们才从古汉语中引用'混沌'一词（'气似质具而未相离，谓之混沌'），避免'混乱'、'紊乱'等等容易引起误解的说法"[9]。

本世纪60年代兴起的自组织理论，给古代关于宇宙万物起源于混沌的演化思想以现代科学的解释，并作为自己理论的基本观点之一。自组织理论的创始人 Prigogine，把古代"原始混沌"概念解释为热平衡态，称为"平衡热混沌"，也称第一类混沌，以此作为自组织过程的起点，并用"从混沌到有序"的命题来概括自组织过程。协同学创始人 H. Haken 也持有类似的观点。自组织理论试图将混沌学的研究成果吸收到自己的框架中，作出了被混沌学家所承认的两点重要贡献：第一，阐明了混沌学的混沌是系统的一种远非平衡的状态，并称为非平衡态混沌，也称第二类混沌；第二，提出混沌运动是一种自组织过程。自组织理论把非平衡态混沌作为从原始混沌开始的演化过程的归宿，这为古代的终极混沌观念提供了一种现代科学的解释。

应该着重说明，混沌学作为一门现代科学，对混沌概念作了严格的界定，虽然由于混沌运动的复杂性，这些界定尚未完全统一，但已经使它成为精确的科学概念，这也就限制了它的使用范围。我们必须区分古人讲的混沌，今人日常生活和一般科学中讲的混沌及混沌动力学中的混沌概念。即不能用古代和近代一般科学中的混沌概念去牵强附会地论述混沌动力学中的科学概念，也不应以混沌动力学中的严格科学定义去限制日常生活和一般科学中对混沌一词的使用。然而最有价值的是人们了解了混沌概念的演化过程，将有助于加深理解现代科学混沌概念的深刻哲理，也将有助于现代混沌学从古代混沌观中吸取有益的营养。

二、非线性动力学中的混沌定义

从前面的历史回顾中可知，直到50年代末，混沌学创立之前，混沌概念还是极其含糊的。而且，即使现在，不同领域对混沌的理

解也很不相同。这样，就使得在不同学科的交流中出现了许多歧义。例如，在一些社会科学中，在经济领域中人们常常把一些看来十分复杂，一时难以把握的现象认为是混沌现象，其实它们并不具有严格的混沌特征，而只是周期非常长，行为的规律一时还不清楚而已。为了对混沌现象进行深入研究，特别是搞清它的定性定量特征，必须给定一个严格的定义。

非线性动力学对混沌的研究迄今为止最为系统，最为严密。在非线性动力学中提出了一些可供理论判定的定义和实际测量的标度，尽管这些还只是从数学和物理学的角度给混沌下定义，但它却给混沌学的建立和发展打下了一个基础。其中 Li-Yorke 定理是比较公认的、影响较大的混沌数学定义。

前文已述 Li-Yorke 定理是 1975 年由李天岩和他的导师 Yorke 在题为《周期 3 蕴含混沌》[7]的论文中提出的。从此定理出发，形成了混沌的专门定义。

Li-Yorke 定理：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续自映射，若 $f(x)$ 有 3 周期点，则对任何正整数 n，$f(x)$ 有 n 周期点。

混沌定义：闭区间 I 上的连续自映射 $f(x)$，如果满足下列条件，便可确定它有混沌现象：

(1) f 的周期点的周期无上界；

(2) 闭区间 I 上存在不可数子集 S，满足

(i) 对任意 $x, y \in S$，当 $x \neq y$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \tag{1.2.1}$$

(ii) 对任意 $x, y \in S$，有

$$\lim_{n\to\infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \tag{1.2.2}$$

(iii) 对任意 $x \in S$ 和 f 的任一周期点 y，有

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \tag{1.2.3}$$

根据上述定理和定义，对闭区间 I 上的连续函数 $f(x)$，如果存在一个周期为 3 的周期点时，就一定存在任何正整数的周期点，即一定出现混沌现象。用李天岩的话来说，只要有周期 3 就"乱七

八糟"什么周期都可能有。

这个定义是针对一个集合提出的，但它表明了混沌运动的重要特征：

(1) 存在可数无穷多个稳定的周期轨道；

(2) 存在不可数无穷多个稳定的非周期轨道；

(3) 至少存在一个不稳定的非周期轨道。

定义表明在区间映射中，对于集合 S 中的任意两个初值，经过迭代，两序列之间的距离的上限可以为大于零的正数，下限等于零。就是说当迭代次数趋向无穷时，序列间的距离可以在某个正数和零之间"飘忽"，即系统的长期行为不能确定，是一种与我们通常熟悉的周期运动极不相同的运动形态。但应该指出的是上述定理或定义都只是表明一种数学上的"存在性"，并没有描述它们的测度和稳定性。

当然，仅仅从非线性动力学，或者从数学、物理学的角度来定义混沌是远远不够的。混沌作为一种自然界与人类社会中普遍存在的运动形态也不可能完全纳入某一学科的范畴，我们只能以此为一个起点，逐步扩展对混沌的研究。随着研究的深入对混沌运动的特征和涵义的认识也会不断深化。

第三节 混沌学研究的意义

一、混沌学研究对现代科学发展产生的巨大影响

混沌学研究从其早期探索到重大突破，以至到本世纪70年代以后形成世界性研究热潮，其涉及的领域包括数学、物理学、化学、生物学、气象学、工程学和经济学等等众多学科，其研究的成果，不只是增添了一个新的现代科学学科分支，而且渗透和影响着现代科学的几乎整个学科体系。混沌学的研究揭开了现代科学发展的新篇章。混沌理论主要属于物理学，但其知识和工具积累主要靠数学。现代数学使混沌理论成为严密的科学，同时混沌的研究也成了现代数学发展的重要动力。

如前所述，法国伟大数学、物理学家 H. Poincaré 的数学思想对 20 世纪的数学发展一直产生着巨大影响，他提出的拓扑学、微分方程定性理论等成了 20 世纪数学发展的重要方向，然而 Poincaré 的数学工作是为解决物理问题服务的，与探索混沌现象密切相关，Poincaré 的贡献就是混沌研究促进数学发展的重要明证。

混沌对现代数学的影响是多方面的。在分析数学方面最突出的是微分动力系统，其理论是混沌研究的基本工具，数学混沌是微分动力系统理论的重要内容，两者相辅相成。混沌研究对几何学的影响，突出表现于分形几何学的发展，混沌学研究中刻划奇怪吸引子、确定不同吸引域的分界线、描述 KAM 环面破坏过程等等都推动了分形几何学的发展。分形几何学开辟了几何学全新的研究领域，它所提出的全新的概念和方法，代表了几何学的一场革命。混沌研究也使古老的数论焕发青春，数论中代数数、理想、范数、基数、素数、Farey 序列等抽象深奥的概念在混沌研究中均可找到直接的应用。混沌研究还推动了统计数学的发展，作为内在随机性的混沌既为算法信息论提供了物理对象，又促进了算法信息论向纵深发展。混沌学、分形几何学、元胞自动机理论、符号动力学等研究，也促进了离散数学的发展。

同时，混沌与分形的研究改变了数学家的传统工作方式。如今，当数学家面临一个需要严格证明的命题时，首先进行计算实验，分析数值结果，观察计算机显示的图象，然后再进行传统的逻辑证明，或抽象出新的概念和命题。这种新的工作方式正使理论特色最浓的数学跳出纸和笔的“传统王国”，开始成为一门新型的“实验科学”。

混沌研究影响最深的领域是物理学。如前所述，混沌现象首先是在天体力学中发现的，一旦发现就对经典力学的基本假设提出了挑战。自从近代科学诞生以来，天体运动一直被看作是确定性系统的典型，天体力学被认为是决定论科学的典范。但是，在天体力学和天文学中，几个世纪以来，人们也一直在研究天体特别是太阳

系的稳定性问题。Lagrange、Laplace 等都对太阳系的稳定性作出过证明，但这些证明都是在近似条件下获得的，只能表明太阳系在有限的时间范围内是稳定的，不能据此判断轨道在以百万年计的宇宙时间尺度上的长期行为。前文已述，Poincaré 在以太阳系的三体问题为背景对周期轨道进行了深入的研究，发现确定性动力学方程的某些解有不可预见性，这实际上就是动力学混沌现象。混沌学研究极大地促进了天体力学的发展，尤其是 KAM 定理的建立，解决了长期困扰学术界的多体问题，突破了牛顿力学的理论构架，为科学地处理天体运动的稳定性问题打下了基础。混沌理论还初步解释了以后要讨论的小行星带 Kirkwood 间隔的成因和小行星在黄道带上的分布，以及木星大红斑成因等问题。尤为重要的是混沌研究改变了物理学家对天体运动及天体力学的看法，混沌的发现促使人们开始抛弃天体运动中历代相传的决定论传统。

混沌研究对非线性动力学的发展起着全局性、本质性的影响。非线性动力学的研究一开始就与混沌探索联系在一起。Poincaré 首创了许多重要概念与方法，引发了本世纪的一系列研究。我们若把 Poincaré 的工作看作为非线性动力学发展的第一阶段，本世纪苏联学者 A. A. Andronov 等开创的非线性振动理论研究为非线性动力学发展的第二阶段，那末，混沌学的创立就代表了非线性动力学发展的第三阶段。KAM 定理、Smale 马蹄、Lorenz 的确定性非周期流、Ruelle 和 Takens 的奇怪吸引子等都是非线性动力学的重要进展。混沌学不仅发现了许多过去未曾重视的非线性问题，解释了许多非线性现象的机理，而且引起了力学基本观念的革命性转变，使人们开始认识到确定论与概率论并非相互排斥、截然对立，牛顿力学既是确定论的，也可以是概率论的，混沌学为牛顿力学和统计力学架起了相互沟通的桥梁。

湍流是物理学中一个历史悠久的难题，它涉及从大到小的许多尺度上的运动，其基本特征是流体微团运动具有随机性。湍流的发生机制及运动规律，一百多年来一直没有找到很好的理论解释。而混沌理论为解决这一百年难题提供了启示，现在混沌实验研究

及理论分析已揭示出确定性弱湍流发生的几条道路，如准周期和锁相、次谐波分叉、三频率拟合、阵发噪声等。湍流理论的发展是混沌理论对物理学的一大贡献。"混沌和湍流正在成为跨越物理学许多分支的普遍概念，其重要性不亚于有序和相变"[16]。

最近十年里，在经典混沌成就的推动下，量子混沌的研究也已经兴起。量子力学是描述微观粒子运动规律的物理学分支，经典力学的研究对象则是这些微观粒子所组成的宏观物体。所以，经典力学和经典混沌应是量子力学在极限条件下的表现，然而量子力学的极限过渡问题，一直没有真正严格地实现。目前，学术界正从量子系统的动力学入手，考察是否存在"无可怀疑"的关于混沌运动的迹象，包括统计规律性，对于初始条件的不稳定性；又从量子映射或量子系统的动力学去研究规律运动条件被破坏的机制，特别是"拉伸"(Streching)与"揉搓"(Folding)的出现；还从半经典理论入手，研究不确定性关系对经典混沌运动的影响与量子经典对应问题。量子混沌的研究出现了一种风格纷呈的兴旺局面，推动了物理学这一前沿学科的迅速发展。

如前文所述，混沌理论的兴起曾得力于生物学领域种群生态学提出的简单数学模型，而混沌学研究的进展又将生物学作为除物理学科以外的最早应用领域，现在混沌动力学已是研究生物现象的主要理论工具之一。从一系列专著中都可以看出混沌研究对生物学发展的巨大影响。

混沌理论对生物学影响的重要表现之一是改变了生态学种群演化理论。在混沌理论出现之前，生物学家普遍认为种群演化不可能无限地增长下去，最终应大体稳定在一定水平上，混沌研究有力地冲击了这种传统观点，R·May，M. Schaffer 等人经深入研究确认种群系统的典型行为是混沌运动，稳定平衡只不过是一种假定。1983 年 8 月在波兰华沙召开的国际数学家大会上，Yu. M. Svirezhev 作了《数学生物学的近代问题》的发言，指出在食物链系统中存在奇怪吸引子，也发现了 Feigenbaum 的倍周期分叉现象。混沌学理论否定了生态学长期沿用的基本假定，这就要求在非线

性动力学的基础上重建这一学科，这也意味着最终将导致生态学的革命性变革。

另外，混沌理论对生物进化学说也产生了重大影响。1859年《物种起源》的发表，标志着达尔文进化论的创立，极大地推动了生物学的发展。本世纪中叶以来，又形成了综合自然选择学说与基因学说的现代新达尔文主义进化论和非达尔文主义的分子进化论。达尔文进化论的中心概念是"选择"。新达尔文进化论把进化机制归结为基因突变、基因重组、自然选择和隔离，但其核心仍是自然选择。然而分子生物学研究在发现"中性突变"后，提出了"中性说"，认为分子进化是最根本的，自然选择是次要的。这两种学说的矛盾，在混沌理论的应用研究中得到了协调。

根据混沌理论，一个确定性系统自身就可以产生内部随机性。可以把基因突变看作是一个混沌动力学过程，从分子层面看，各种突变的可能性几乎是相等的，突变是中性的、随机的，基因突变是混沌的，但并不是纯粹的随机性和偶然性，混沌蕴含着某种深层次的结构和秩序，在一定的条件下可以某种方式显示出来。混沌理论认为，进化是随机性加反馈[11]，即进化可区分为随机性和非随机性两个环节，第一环节的随机性由混沌动力学过程产生，随机性占支配地位，相当于中性突变；第二环节是反馈，对应于生物学中遗传信息的复制或由于环境作用导致的世代更替。在这一反馈过程中，由于并非所有突变都得到正反馈，所以长期的作用必然产生某种定向选择作用，这和达尔文的进化论核心观点一致。根据混沌理论，达尔文进化论和分子进化论本质上并不矛盾，只是侧重点不同。达尔文进化论是由宏观统计归纳出来的理论，忽略了小的涨落，物种进化的单位是种群而不是个体。而分子进化论是微观理论，来源于分子层面遗传分子的多方面研究，实证性比较强，但它注意的是个体的小尺度、短时间的进化。真实的生物进化过程应是宏观必然性和微观偶然性的对立统一，只有把两者结合起来才能真实地反映生物的进化规律[12]。

混沌研究对于现代科学的影响，不仅限于自然科学，而且涉及

经济学、社会学、哲学及诸多人文科学，可以说，几乎覆盖了一切学科领域。凡是涉及动力学过程的研究领域，大多都会发现混沌，都需要应用混沌动力学的研究成果。在传统的经典科学领域，若按混沌观点重新考察，就会发现新现象、提出新问题、建立新原理；而在一些非经典科学领域，运用混沌理论则可以解释以往无法解释的现象，可以处理历来无法处理的数据，甚至形成一批新的学科分支。

混沌研究对于现代科学更深刻的影响，主要还在于在广阔的科学领域里推翻了经典理论的一些基本假设，改变了那些领域的研究方法，这最终将可能孕育成一场科学大革命。《混沌——开创新科学》的作者詹姆斯·格莱克认为，混沌“正在改变着整个科学建筑的结构”，郝柏林院士则断定，混沌学“正在促使整个现代知识体系成为新科学”[11]。

二、混沌学研究革新了经典的科学观与方法论

以牛顿力学为核心的经典理论，不仅以其完整的理论体系奠定了近代科学的基础，而且以其科学观和方法论影响了学术界整整几个世纪。

经典理论构成了确定论的描述框架，从牛顿到 Laplace，对现实世界的描绘是一幅完全确定的科学图象。整个宇宙是一架硕大无比的钟表，过去、现在和将来都按照确定的方式稳定地、有序地运行。相对论的创立突破了牛顿的绝对时空观，但在我们生活的宏观低速世界里，爱因斯坦并未向牛顿的“钟表模式”提出挑战。但统计物理和量子力学的创立，揭示了微观粒子运动的随机性，大量微观粒子的运动遵循着另一种规律——统计规律。描述统计规律的概率论方法从此获得了独立的科学地位，世界又获得了另一幅随机性的科学图象。

确定性联系着有序性、可逆性和可预见性，随机性联系着无序性、不可逆性和不可预见性。确定论和随机论是在认识论和方法论上相互对立的两套不同的描述体系。这两大体系虽然在发展过程中，在各自的领域里，“成功地”描绘过世界，但客观世界只有一个，

世界到底是确定的还是随机的？是必然的还是偶然的？是有序的还是无序的？可否将世界分成一半 -半？这是一个长期争论而未得到解决的问题。

如前所述，在混沌发现之前，现代科学已认识到，随机性可以起源于大数现象和群体效应。但人们长期以为，确定性系统排斥随机性。随机性只是某些复杂系统的属性。然而混沌研究表明：一些完全确定性的系统，不外加任何随机因素，初始条件也是确定的，但系统自身会内在地产生随机行为，而且，即使是非常简单的确定性系统，同样具有内在随机性。例如，具有最简单的非线性关系的抛物线函数，可以导致内涵极其丰富的一维映射，可以成为自然界一大类演化现象的数学模型。在简单的确定性系统中，混沌运动不涉及大量微观粒子和无法了解的影响，内在随机性的根源出自于系统自身的非线性作用，即系统内无穷多样的伸缩与折叠变换。自然界和人类社会绝大部分的系统，都具有这种非线性特性，因此，随机性是客观世界的普遍属性。混沌学揭示的随机性存在于确定性之中这一科学事实，最有力地说明客观实体可以兼有确定性和随机性。

世界是有序的还是无序的？从牛顿到爱因斯坦，他们都认为世界在本质上是有序的，有序等于有规律，无序就是无规律，系统的有序有律和无序无律是截然对立的。这个单纯由有序构成的世界图象，有序排斥无序的观点，几个世纪来一直为人们所赞同。但是混沌和分形的发现，向这个单一图象提出了挑战，经典理论所描述的纯粹的有序实际上只是一个数学的抽象，现实世界中被认为有序的事物都包含着无序的因素。混沌学研究表明，自然界虽然存在一类确定性动力系统，它们只有周期运动，但它们只是测度为零的罕见情形，绝大多数非线性动力学系统，既有周期运动，又有混沌运动，虽然并非所有的非线性系统都有混沌运动，但事实表明混沌是非线性系统的普遍行为。混沌既包含无序又包含有序，混沌既不是具有周期性和其他明显对称性的有序态，也不是绝对的无序，而可以认为是必须用奇怪吸引子来刻划的复杂有序，是 -种蕴涵在

无序中的有序。以简单的Logistic映射为例，系统在混沌区的无序中存在着精细的结构，如倒分叉、周期窗口、周期轨道排序、自相似结构、普适性等，这些都是有序性的标志。所以，在混沌运动中有序和无序是可以互补的。郝柏林院士给起了个新名字称为"混沌序"[14]。可见，混沌系统乃至客观世界应是有序和无序的统一体。

回顾历史，量子力学创立之前，人们长期认为，波动性和粒子性是两个截然对立的物质属性。后来爱因斯坦等人提出了著名的微观粒子波粒二象性观点，认为波动性和粒子性是微观粒子统一的基本属性，从而极大地推动了科学的发展。与此惊人地相似，混沌学的创立正在缩小确定论和随机论这两大体系之间的鸿沟，世界既不能分成两半，也不是非此即彼。混沌学研究揭示：世界是确定的、必然的、有序的，但同时又是随机的、偶然的、无序的，有序的运动会产生无序，无序的运动又包含着更高层次的有序。现实世界就是确定性和随机性、必然性和偶然性、有序和无序的辩证统一。

混沌研究还对传统方法论的变革有重大贡献，其中最突出的是从还原论到系统论的转变。经典的还原论认为，整体的或高层次的性质还可以还原为部分的或低层次的性质。认识了部分或低层次，通过加和即可认识整体或高层次，此即为分析累加还原法。这是从伽利略、牛顿以来三百多年间学术界的主体方法。随着近代科学的发展，包括对混沌现象的探索，还原论到处碰壁。本世纪50年代，系统论思想开始形成，主张把研究的对象作为一个系统来处理。在此系统中，整体或高层次性质不可能还原为部分或低层次性质，研究这些整体性质必须用系统论方法。混沌是系统的一种整体行为，混沌学研究的成果成了系统论的有力佐证，混沌学创建人之一的Feigenbaum是批判还原论、宣扬整体观和系统论的重要代表。整体观和系统论正随着混沌学一起扩展到各现代学科领域，为现代科学的革命性变革做着方法论的准备。

应该指出，混沌作为当今举世瞩目的前沿课题及学术热点，不仅大大拓展了人们的视野并加深了对客观世界的认识，而且由于混沌的奇异特性，尤其是对初始条件极其微小变化的高度敏感性

及不稳定性，还促使人们思考，混沌在现实生活中到底是有害还是有益？混沌是否可以控制？有何应用价值及发展前景？近十年间，科学界以极大的热情投入了混沌理论与实验应用的研究。90年代以来，国际上混沌同步及混沌控制的研究，虽然步履维艰，但已取得了一些突破性进展，前景十分诱人。我们完全有理由相信，混沌学的进步不仅孕育着深刻的科学革命，而且一定会促进社会生产力的大发展。

参考文献

[1] Poincaré，科学的价值，北京：光明日报出版社，1988，386～389页

[2] Poincaré，科学的价值，北京：光明日报出版社，1988，387页

[3] Poincaré，科学的价值，北京：光明日报出版社，1988，389～394页

[4] 郝柏林，牛顿力学三百年，科学，1987，39(3)

[5] 苗东升、刘华杰，混沌学纵横论，北京：中国人民大学出版社，1994，41～50页

[6] Ruelle D and Takens F，On the nature of turbulence. Commun. Math. phys. 1971，20：167～192；23：343～344

[7] Li T Y and Yorke J A. Period three implies chaos. Am. Math. Monthly. 1975，82：985～992

[8] Arnold V I. Instablity of dynamical systems with adveral degrees of freedom. Soviet Mathematics——Doklady. 5，1964，581～585

[9] 郝柏林，自然界中的有序和混沌，百科知识，1984，1

[10] 郝柏林，分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他，物理学进展，1987，3(3)：392

[11] Ford J.(1990)，Chaos：its past，its present，but mostly its future，Reprint

[12] 苗东升、刘华杰，混沌学纵横论，北京：中国人民大学出版社，1994，175页

[13] 郝柏林：混沌——开创新科学，中译本校者前言，上海：上海译文出版社，1990

[14] 郝柏林，自然界中的有序和混沌，百科知识，1984，No.1

第二章　常见的混沌现象

第一节　自然界中的一般混沌现象

自然界中的混沌现象是很普遍的。几乎可以说，自然界中的绝大部分运动都是混沌运动，规则运动相对地只在局部的范围和较短的时间内存在。如果把系统分为保守和耗散的两类，那么保守系统又可以区分为可积与不可积。保守系统的运动方程中的绝大部分方程都是不可积的，不可积性意味着混沌运动。这从数学上说明了混沌的普遍性。完全不可积系统的运动将遍历整个等能面，微观保守系统的不可积性导致了宏观系统的不可逆性。正是不可积的普遍存在，使一般宏观现象都是不可逆的。

根据日常的观察与经验，我们周围的世界是不断发展变化的，具有各种各样的耗散结构。开放系统中最简单的耗散结构是由极限环描述的周期运动。两个或两个以上周期运动的耦合会产生混沌运动。因此，对于具有耗散结构的系统，当非线性进一步增强时，一般都会出现混沌运动。下面将从不同领域中挑选一些实例，以说明混沌现象的普遍性，同时为以后的理论研究提供一些现实背景。

一、天体力学中的混沌[1]

天体力学系统是典型的保守系统。人们通常把太阳系的运动说成是日月经天千古不变，是一种很规则的运动。现在发现太阳系中也存在混沌运动，如太阳系小行星带的 Kirkwood 间隙问题与地球上流星的起源问题。

火星与木星之间存在着一个小行星带，太阳系中的小行星大部分位于这个带中，其中几千个直径超过一公里的小行星有完全

确定的轨道。作出行星数目随轨道周期的分布图(图2 1),可在四个周期处发现明显的间隙。这些周期与木星周期11.9年之比为简单的分数1/3,2/5,3/7与1/2。这些间隙称为Kirkwood间隙。周期比为简单的分数表明存在一种共振现象。但是长期以来,人们不明白Kirkwood间隙的机制是什么?Wisdom注意到了小行星的运动存在着几个标度差别很大的频率这一事实,利用映象的办法研究了这个问题。例如1/3间隙中小行星的周期小于4年。由于与木星运动共振产生的长轴的振动周期为几百年,而其近日点的进动周期为几万年。据此,Wisdom在平面与小偏心率近似下,把微分方程问题化为映象问题,以木星周期采样。计算发现,在开始的20万年内没有出现什么反常的现象,偏心率在10%以内振动。在2×10^5年以后,偏心率的变化增大,并突然出现混沌涨落至35%。这样大的偏心率足以使小行星与火星发生碰撞,从而脱离小行星带。这就是形成Kirkwood间隙的原因。

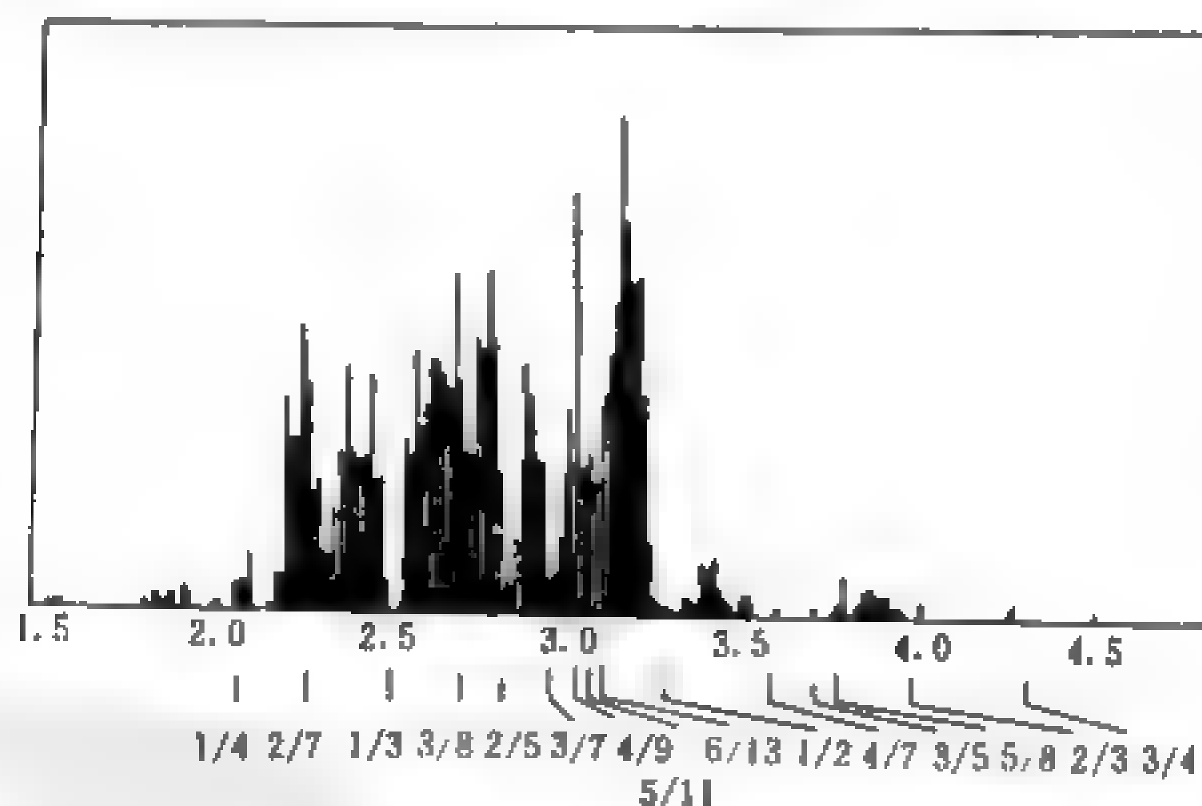


图2-1 小行星数随平均轨道频率分布

与小行星带有关的另一个疑难问题是地球上流星的起源问题。太阳系的小行星大部分存在于火星与木星之间,因此地球上的流星也只能起源于这个小行星带。但是这个小行星带离地球很远,只有偏心率达到57%的小行星的轨道才能与地球轨道相交。Wis-

dom 进一步把非共面效应，木星轨道平面相对于行星带的缓慢变化考虑进去，发现混沌运动确实可以使偏心率达到 60%。为了得到令人信服的结果，他还用数值积分方法求解微分方程，对单个试验行星积分到 10^6 年，证实了偏心率确实可以超过 57%。根据上述计算，能够给出与观察一致的流星轨道与丰度，特别是所谓的"下午效应"，即下午观察到的流星是上午的两倍。

混沌理论在天体力学和天文学中的应用还有很多，如木星大红斑成因，短周期彗星的起源等，都可用混沌理论来解释。最重要的是，混沌研究改变了物理学家对天体现象的看法。如前所述，从牛顿以来，天体运动一直被视为确定性系统的典型。但混沌现象的发现，使天体力学家能够透彻地了解深藏在比如三体问题后面的物理意义。

二、化学混沌[2]

所谓化学混沌，通常是指化学反应系统中某些组份的宏观浓度不规则地随时间变化的现象。这里浓度变化的不规则性并非由于实验条件的不确定性或测量仪器的不准确性造成，而是完全由系统内部的反应动力学机理所决定。传统的化学热力学和动力学，是以分子的无规则热运动和杂乱碰撞即分子混沌(或微观混沌)的概念为基础的。而化学混沌通常是指宏观水平上的不规则行为，并非指微观水平上的分子混沌。

一般来说，描述化学反应的方程组都是非线性的。因此早在 1973 年 D. Ruelle 就指出，在某些条件下，化学反应有可能呈现出浓度随时间作非周期的不规则变化行为，即化学混沌。1977 年，L. F. Olsen 和 H. Degn 报道了在一类涉及过氧酶的反应中观察到了混沌现象。同时，R. A. Schmits 等人在研究 Belousov—Zhabotinski 反应的振荡行为时也观察到了混沌现象。大量研究表明，许多能发生化学振荡的系统大多数能发生化学混沌现象。目前研究得比较透彻的还是 B-Z 反应。

在 1000ml 烧杯内先倒入 600ml 蒸馏水，再依次溶解 16g 丙二酸(0.25M)，6g 溴酸钾(0.06M)，指示剂 2～4ml(由邻菲罗啉

Ferroin0.05g,硫酸亚铁 0.07g 溶于 10ml 水所配成),0.5 克 $Ce(NO_3)_4 \cdot 6(H_2O)$或 $Ce(NH_4)_2 \cdot (NO_3)_2$,在搅拌的条件下倒入 26ml 浓硫酸(0.8M),静置数分钟后即出现溶液颜色先由红变蓝,又由蓝变红,周而复始,周期约 30s 的颜色交变现象。这个反应是在红蓝两种颜色的状态间发生振荡,故取名为化学振荡。这个反应常叫 B-Z 反应。

化学振荡是处于远离平衡态的耗散结构,服从非线性的微分方程。发生于具有自催化或自阻化的开放体系中。化学振荡的研究具有很重要的意义。生物体系就是一个远离平衡态的定态,为一耗散结构,因此生物体中存在相当多的振荡反应。可以说,没有振荡反应就不会有生命。对振荡反应的研究,不仅在化学实验与其有关的理论上开拓了一个新方向,更有意义的是对生命体内的变化能得到进一步的认识。

化学振荡是一种规则的周期现象,可由其频率表征。当条件发生变化时,一种频率的化学振荡有可能进一步失去稳定性,产生出新的振荡频率。在条件发生进一步变化时,由新的频率表征的振荡态又会失去稳定性而产生出更新的振荡频率。显然,这是一种分叉过程。化学振荡通过逐级分叉,系统中出现的振荡频率会越来越多,系统的时间特性会变得越来越复杂,最后导致混沌状态的出现。

例如,在一个连续流动型全混釜式反应器中,当反应温度为 39℃,丙二酸,溴酸钠,硫酸和硫酸铈的进料浓度分别为 0.08M、0.036M、1.44M 和 0.00025M 时,物料在反应器中的平均停留时间为 4.5min 时,B-Z 反应可以呈现出化学混沌现象。

对如下反应

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \tag{2.1.1}$$

可以用方程组

$$\dot{C}_A = -k_1 C_A C_B + k_2 C_C - r[C_A - C_A(0)] \tag{2.1.2A}$$

$$\dot{C}_B = -k_1 C_A C_B + k_2 C_C - r[C_B - C_B(0)] \tag{2.1.2B}$$

$$\dot{C}_C = -k_1 C_A C_B + k_C C_C - r \tag{2.1.2C}$$

来描述。其中(2.1.2*A*)的意义是:反应物 A 的浓度 C_A 减少是由于

反应物 A 和 B 之间的碰撞(产生化合物 C),其增加是由于化合物 C 的减少(分解为反应物 A 和 B)。如果速度 r 增加,C_A 也减少,因为 $k_1=k_2=0$,从方程(2.1.2A)积分可得:$C_A(t)-C_A(0)$ 正比于 $e^{(-rt)}$。

一般,浓度为 C_i 的 m 个化学反应可用下述一阶非线性微分方程组描述:

$$\dot{C}_i=g_i\{C_j\}-r[C_i-C_i(0)]=F_i\{C_j,\lambda\} \tag{2.1.3}$$

这里,如果忽略三体碰撞,则函数 $g_i\{C_i\}$ 只涉及形如 C_i^2 和 C_iC_j 的非线性项。这一反应可通过控制参数集 $\lambda=C_i(0),k_j,r$ 来研究。$C_i(0)$ 是初始浓度,k_j 是与反应速度有关的温度,r 是流速。因 r 影响所有的单个反应,而且容易通过改变药品的投放率来处理,因此常将它作为唯一的控制参数。在 B Z 反应中,混沌特征的变化是 Ce^{+4} 离子的浓度 C。它可通过选择这些离子的光度来测定。

仅靠偶然发现的化学振荡反应不能满足动力学研究的需要,怎样设计化学振荡反应是一个重要课题。1980 年法国学者 J·Boissonde 和 De Kepper 提出了设计化学振荡反应的三个条件:(1) 非平衡态;(2) 多稳态;(3) 反馈。在这三个条件中,第一个为外部条件,第二个是状态特征,第三个则是内部机制即系统的非线性机制,由此设计出许多新的化学振荡反应,丰富了化学振荡反应体系。

近年来非线性化学动力学发展迅速,有这样几个热点:(1) 化学反应——扩散问题:反应——扩散过程产生时空有序即化学波,如前沿波、螺旋波、Turing 波等,它代表了一定的时空发展模式。这里的问题是怎样在实验中得到化学波?怎样标度?空间图案与体系的动力学状态有什么关系?一个浓度前沿以一定速度前进时与神经的传递极为相似。阿米巴菌在培养皿中形成的花纹与螺旋波非常类似。这些与生命过程有没有联系?(2) 控制化学混沌:化学反应过程常常是可以控制的,控制外部因素可使动力学过程停留在某个周期轨道上,以获得期望的结果。也许不久的将来,化学工作者利用混沌控制理论来指导化工生产过程。非线性化学的研

究得益于分叉理论的发展，同时丰富并不断提出了新的问题。

三、生态学中的混沌——Lotka-Volterra 模型[3]

在自然界中有许多动物的数量并不总是单调地变化，而是会随时间振荡的。如根据 Hudson Bay 公司从 1845 年到 1935 年收购到的山猫（捕食者）和野兔（被捕食者）的毛皮数量，可画出山猫和野兔个体数目随时间变化的特性图（图 2-2）。图形表明，捕食者和被食者的个体数目均不是单调增加或减少，而是随时间振荡，且彼此之间有一个位相差。又如亚德里海中有两种鱼类：被捕食的小鱼和捕食小鱼的大鱼。观察发现，它们的数量也交替增大减少。

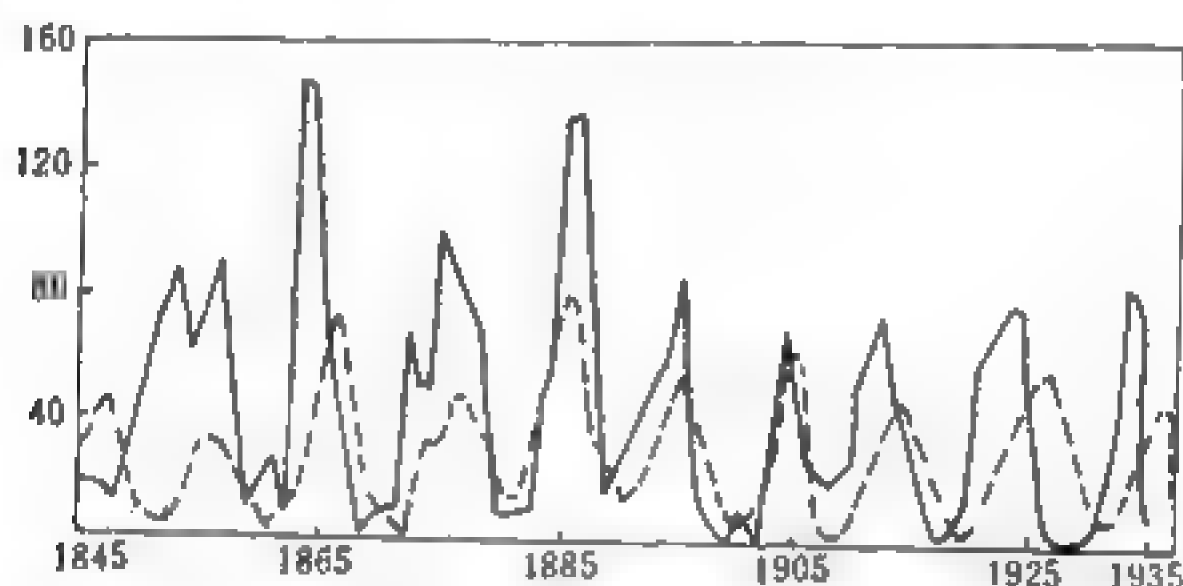


图 2-2　山猫和野兔数目的变化

为了从理论上解释这种生态现象，美国的生态学家 Lotka（1910 年）和 Volterra（1931 年）分别提出了一个数学模型，现称之为 Lotka-Volterra 模型，或捕食者和被捕食者模型。它可满意地说明这一生态振荡现象。

同两种群一样，如果是三个种群在一个自然环境中生存，则它们之间必然相互影响，每一种群的增长都将与别的种群的存在多少都有关系。设三个种群的密度分别为 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 和 $x_3(t)$，并假定种群密度分布是均匀的，则它们的增长模型可以写成

$$dx_1/dt=x_1F_1(x_1,x_2,x_3) \tag{2.1.4A}$$

$$dx_2/dt=x_2F_2(x_1,x_2,x_3) \tag{2.1.4B}$$

$$dx_3/dt=x_3F_3(x_1,x_2,x_3) \tag{2.1.4C}$$

如果用线性化的方式来代替(2.1.4)中的 F_1, F_2, F_3，即得 Lotka-Volterra 模型：

$$dx_i/dt = x_i[b_i + \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j], \quad i=1,2,3 \tag{2.1.5}$$

相对于多种群的 Lotka-Volterra 模型为：

$$dx_i/dt = x_i[b_i + \sum_j a_{ij}x_j] \quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.1.6}$$

多种群之间的关系是很复杂的。1978 年 Vance 在如下的纯竞争系统中发现存在混沌解(当参数为 $r_1=r_2=-r_3=1, a_{11}=a_{12}=a_{22}=0.001, a_{21}=0.0015, a_{13}=0.001, a_{23}=-0.005, a_{31}=-0.0005, a_{33}=0$)。

$$dx_i/dt = x_i[r_i - \sum_j a_{ij}x_j], i=1,2,3 \tag{2.1.7}$$

在一个实际生态系统中，种群之间的捕食关系是非常复杂的。这保证了生态系统的稳定。当捕食者食物链很复杂时，一旦某一种被捕食少到一定程度后，捕食者将放弃捕食这种动物而转向捕捉另一种数量较多的种群。这样就中断了在两种群 Lotka-Volterra 模型中的振荡现象，保证了系统的稳定。

四、生物学中的混沌——一个白细胞生成控制模型[4]

在生物体中通常存在一个自我维持的多能干细胞群，它能够生成红系、粒系和巨核细胞系定向干细胞。随着骨髓干细胞的不断成熟，它们获得使之被鉴定为增殖的髓细胞样前体的形态学特征。再成熟下去，这些细胞的增殖活动会停止，细胞进入成熟期，胞核脱出。成熟中性粒细胞(一类起源骨髓干细胞的白细胞)从骨髓释放入血液，在血液中它们以短暂的半衰期(约为 7h)随机地被破坏。对于可辨认的人类髓细胞样前体细胞及其后代来说，它们成熟、释放的总时间约需 6 天。激素控制在循环中性细胞群和骨髓干细胞之间进行调节。循环中性粒细胞数目的减少，导致促粒细胞生成素(GP)的生成和释放。GP 则作用于骨髓干细胞群，使增殖活动增加，最终致使可辨认的髓细胞样前体区域的细胞量增大。

令 x 表示循环中性粒细胞的密度(单位为每千克重的细胞数目)，γ 表示随机中性粒细胞的破坏量(单位为小时$^{-1}$)；v 表示新的

中性粒细胞的入血量(单位为每千克小时的细胞数目);F(单位为每千克小时的细胞数目)表示进入可辨认髓细胞样前体群的定向髓细胞样前体细胞量;A 表示在该区域中发生的细胞放大倍数。则由上述中性粒细胞生成系统,有

$$dx/dt=-\gamma x+v(x_\tau) \tag{2.1.8}$$

其中 $x_\tau=x(t-\tau)$;$v(x_\tau)=AF(x_\tau)$是过去某时刻 τ 产生的需要量而在目前进入血液的细胞量。

在循环中性粒细胞水平的一个很宽的范围内,中性粒细胞生成率 v 是递增的中性粒细胞密度的减函数。但是,由于各种各样因素的影响,在极低的中性粒细胞水平上,该生成率将有可能下降到接近于零。因此对于 v 选择驼峰式函数。

$$v(x_\tau)=\beta x_\tau \frac{\theta^n}{\theta^n+x_\tau^n} \tag{2.1.9}$$

这里 τ,θ 和 n 均为参量。合并式(2.1.8)和(2.1.9),我们得到

$$dx/dt=-\gamma x+\beta x_\tau \frac{\theta^n}{\theta^n+x_\tau^n} \tag{2.1.10}$$

这是一个刻划循环中性粒细胞数的非线性延时微分方程。细胞的破坏率保持不变,细胞的生成率在反馈控制之下。中性粒细胞生成方程具有两个定态,$x^*=0$ 和

$$x_0^*=\theta\left[\frac{(\beta-\gamma)}{\gamma}\right]^{1/n} \qquad (\beta>\gamma) \tag{2.1.11}$$

而不是只有一个定态。可以确定定态的稳定性,当 $\beta<\gamma$ 时,$x^*=0$ 是仅有的定态,它总是稳定的,细胞最大注入量低于中性粒细胞破坏量。当 $\beta>\gamma$ 时,存在两个定态,$x^*=0$ 总是不稳定的,而由式(2.1.11)给出的第二个定态可能稳定,亦可能不稳定,这取决于参量 γ,β,n 和 τ 的值。第二个定态的稳定性条件较复杂,就正常人而言,从实验数据中可得到如下参量值:$\gamma=0.1$/天,$\beta=0.2$/天,$n=10$ 和 $\tau=6$ 天。根据这些参量,稳定性分析预言中性粒细胞数的定态应该是不稳定的,并且方程(2.1.10)用这些值的数值积分的确显示出中性粒细胞数以大约 20 天的周期发生轻度振荡。这一周期与预期的周期范围(在 12 天和 24 天之间)相符。把 τ 增大到 20 天

并完成同样的数值积分，这时完全确定的方程(2.1.10)的解出现极度的不规则性。再次表明，在确定性的连续的时间系统中存在着内在混沌的可能性。此处模型里的循环中性粒细胞水平是随机的，仅仅因为其自身的演化方程的缘故。临床数据表明，式(2.1.10)的动力学特性与在慢性粒细胞白血病患者中白细胞计数的数据至少具有定性的相似性。说明在理论模型与已经提出的疾病机制之间可能存在着某种联系。

五、生命节律中的混沌[5]

生理节律对生命至关重要。有些节律贯穿整个的生命过程，即使是短暂的中断也会导致死亡。另有一些受意识控制或不受意识控制的节律则出现在个体生命的各个不同时期。生理节律不是孤立存在的，相反，它们彼此之间、与内外环境之间都有相互作用。起始、终止或改变一个节律很可能有着十分重要的实际意义。

发生心脏猝死时，心脏没有预兆就出现致命性的心律失常，它每年要夺去上百万人的生命。在大多数情况下，这种心律失常属于心动过速。虽然心动过速开始时常常相当有规则，但一般在心电图上表现为低幅、不规则的波形，反映出在心脏里出现了"纤维性颤动"。纤维性颤动可以分为两类：房颤与室颤，前者起因于心房，后者起因于心室。房颤危险性不大，而室颤往往是致命的。纤维性颤动的一个使人困惑的特点是心脏的许多单独部分都能正常工作。心脏的起搏结常常继续发出有规律的电脉冲。单个肌肉细胞作出适当的反应。每个细胞收到它的刺激，收缩、传递刺激，放松并等待下一个刺激。纤维性颤动心脏的各部分似乎仍在工作，但是整体却已致命地扭曲了。心脏很难自己停止纤维性颤动。这类混沌是相当稳定的。只有来自除纤颤器的电冲击才会使心脏回复到稳态。

Guevara 等从才 7 天的鸡胚胎中取出微小的心脏细胞组织。在没有外来起搏器的情况下，它约以每秒一次的速度跳动。然后插入一个强度和节奏都可改变的微电极，来刺激雏鸡心脏。他们发现，对周期性输入，生理节律经常会被锁定到该周期上去，即产生锁相现象。相反，在其他的刺激频率和强度下，则见不到稳定的模

态锁定特性，而观测到不规则的非周期性动态特性，如阵发、分叉和混沌现象。这说明与混沌动力学的关系确实很密切。

心肌作纤维性收缩的一般过程是一个不协调、不规则而且非常奇异的收缩过程，此时正常的心脏收缩与舒张不再出现，而是以许多单纤维或纤维簇各自互不相关地收缩为标志。在某些区域的纤维性组织静息时，其他邻近的区域或者彼此离得相当远的一些区域可能表现出同步的收缩。在腔室的表面上，存在着一些作纤细颤搐、抽动和震颤动力的区域，同时也有心肌收缩的较为粗纹理的搏动波。这种波缓慢地在肌群上行进，时而在某个方向上移动，时而又在另一方向上移动，而且波的行进时常与其他波发生干涉而受到阻滞。脉冲波可以在任何方向上扩展，它的行进只会受到组织团块中早先存在的或后来形成的局域的限制。这些限制使脉冲波转向其他方向或者更为迂回的路径，发生阻滞的区域只有当一个脉冲波已经穿过心室的其他部分又从另一个方向逼近它时，这个区域才会参与收缩；这种区域依次变成收缩继续行进的起点，而这样的行进又被其他的阻滞所转向。也就是说收缩波是在一系列不断移位而且非常错综复杂的环形回路中传播的。在这些由许多阻滞确定的环形收缩里可以观察到纤颤的基本现象。

生理节律在空间和时间上常是有序的。通常振荡以一种有序的形式从起搏点组织扩展开来。就传播活动而言，其基本要求是待研究的组织是可兴奋的，这意味着刺激可以无损耗地传播到邻近组织。组织在兴奋之后通常有一个不应期，这时组织不会被兴奋。在一维情况下，这导致兴奋以行波方式作有序的扩展。方向相反的两个行波并不能彼此通过，反而互相湮灭。而且当刺激频率增加时，每个脉冲都得到传播已不太可能，往往会有某些脉冲全部或部分受到阻滞。在多维情况下，兴奋的扩展更为复杂。可以相信，心脏的纤维性颤动就是与二维和三维组织中兴奋的异常折返或环形扩展有关。显然，纤颤反映了心脏活动的异常机能组合。正是出于期望认识这种异常机能组合，从而能够找出防止心脏纤维性颤动的期望疗法。这激发了当前对可兴奋介质中活动的空间组织形式

进行各式各样的研究。

六、生理学中的"反"混沌——动态病[6]

传统的生理学观点认为，健康人的心率是很有规则的，具有周期性。因为借助于听诊器或号脉我们不难发现，心律似乎很有规律，即在静止状态下，脉搏强度和心跳之间的时间间隔似乎大致保持相等。然而，更为精确的测量与研究发现，心律节奏随时间的变化是极不规则的，即这一分钟与下一分钟或者这一小时与下一小时的心律将有很大的变化。也就是说，心率在时间上是混沌的。这个混沌并不是说混乱不堪、无规可循，而是确定性系统的内在随机性的一种表现，是一种无周期的有序。

人体是一个极其复杂的空间和时间有机融合的整体。在许多种不同的疾病中，正常的组织结构分解，取而代之的是某种异常的动态特性。把这些以异常时间组织结构为特征的疾病叫做动态病。人们发现这种动态病的出现，不在于人体中的混沌，而恰恰相反在于出现了"周期性"；故此，有人把它称之为"反混沌"。也就是说正常个体身上各个主要系统中的各种节律之间有着错综复杂的相互作用关系。这些节律极少表现出绝对的周期性。实际上，对这些节律（如心率和呼吸）的定量测定往往发现，这些系统中出现的涨落比最初想象的要大得多。因而说，正常的健康的动力学特性是"混沌的"，而疾病倒是与周期性性态有关联。当然，这种正常健康的混沌的确切机制仍未得到阐明（它具有一定的分形形式）。但是，不管把正常的动力学特性解释为混沌还是某种其他类型的动态，有一点很明确，根据节律异常即对混沌态的偏离能够识别出许多疾病。动态病的特征是，某些变量的动力学特性会发生显著的变化。动力学特性可能出现三类定性变化：(1) 由原来定常的变量或只有相对小幅度"无规"涨落的变量，发展成近乎规则的大幅度振荡。因而在生理控制系统中有可能出现不靠节律性过程刻划的规则振荡；(2) 在原来的周期性过程中出现新的周期性；(3) 节律性过程消失，为相对恒常的或非周期性的动力学特性所替代。比如，健康人的心电图、脑电波图、视网膜电图等都表现为混沌运动。而心率出

现有规律的周期振荡或变化程度降低，则可能有心脏突然停止或心脏猝死的危险。患有癫痫、帕金森氏病和狂郁症等精神失调病的人，其神经系统则表现出丧失多变性或出现病理周期性。

实验和临床上都很容易观测到生理控制系统的大量丰富的动态行为(从周期性振荡到不规则的噪声样振荡)。虽然它们中有许多已经为生理学者所熟知，但它们丰富多样的动态结构的普遍性以及其基本特性，还没有得到充分的认识。一旦认识到相对简单的非线性数学模型具有与这些系统同样的动态特性，就会更加明确这些性质的重要性，这意味着生命系统中的动态复杂性可能是正常现象而不是例外情况。正常的和病态的生理系统都有其突出而显著的动力学特征。

许多研究都已致力于刻划生理系统数学模型中的分叉特性。但要确证正常振荡或病态振荡的起因与某种假设的生理机制有联系，就不那么容易了。在许多临床情形里，给患者加周期性刺激是一种治疗手段。如服药与使用心脏电起搏器和机械通气机。这时很难在外加节律和体内节律之间建立一种控制良好而又稳定的关系。对某些糖尿病患者很难制定合适的胰岛素服用时间表。给这些病人定期给予胰岛素，安排有规律的饮食和锻炼方案，也无法把血糖维持在正常范围内，有规律周期性地实施治疗常常反而会出现明显不规则的涨落(如使受监控的血糖升高到正常水平之上)。对这种病人有必要基于环境血糖水平和对葡萄糖控制系统动力学特性的认识，来制定服药时间表。

总之，体内功能的混沌标志着健康，而周期性行为却可能预示着疾病。究竟该怎样理解健康人体的功能会显示出混沌的动态特性还需要进一步的研究，也许正是由于混沌系统可在范围十分广泛的各种条件下工作，它们具有高度的适应性和灵活性，可使系统应付多变环境中出现的种种突变。相反，若系统表现为周期运动，那么系统就只有很少的运动模式，无法应付多变的环境中所出现的种种突变，这会导致系统损伤和功能失调。所以说不规则性和不可预见性的混沌是健康的标志，而周期性的增强却是许多疾病的

象征。我们看到许多人类疾病以不寻常的，复杂的动态行为为特征。分析引起这些疾病的机理，不可避免地要对观察到的动力学特性作理论分析。研究这些问题的途径是建立疾病的理论模型和生物学模型。研究人员的长远目标，是为人类提供诊断和治疗疾病的新方法和新手段。混沌以及分形理论将为人们探索疾病的先期征兆，以致于生命现象本质的认识开辟新的道路。

七、生物波中的混沌现象[7]

1. 群体和周期

长期以来，确定细菌的生长是以观察菌落出现而不是以测量单个细菌个体变化来实现的；细菌生长的快慢不是以单个细菌细胞变化，而是以菌落形成到既定大小所用的时间来衡量的。每一个活的细菌细胞在合适的环境里都可以生长繁殖，最终形成群体。生物进化的观点认为：群体的形成是物种得以生存和充分表达其功能的必要条件。实际上，几乎所有的微生物都是以群体方式存在的。大多以单个细胞为结构基础的细胞群体的形成，不是简单的数量增加，而是十分复杂的生命活动的动态过程。微生物生长具有周期性，通常把两个细胞分裂期间的时间间隔称为一个细胞周期，包括 DNA 复制期和细胞分裂期；其中 DNA 复制期的长短依赖于环境及生长条件。一定条件下，细菌群体生长也可表现为周期性。尽管细菌个体生长的周期与群体活动中一些周期现象有一定的联系，但是从细菌以多细胞群体形式进行生命活动的观点来观察细菌群体生长的周期性，它在本质上应与单个细胞周期无明显关系；而是细菌在群体条件下多个细菌共同完成的一些周期性生命活动以及所伴随的周期性形态结构。

第三军医大学的徐启旺等选用了绿脓杆菌对其生长作了一些初步的探讨。实验选用奇异变形杆菌和绿脓杆菌进行，将奇异变形杆菌点种于营养琼脂平板中心，调节生态条件，培养 8h 后，细菌菌落开始周期性地出现多细胞组成的同心圆(如图 2-3)所示。经 TTC 还原酶反应，结果显示红黄同心圆交替出现，还原酶阳性出现红色，阴性出现黄色。以阳性部分计算，其间隔出现的时间为

3h，内外同心圆面积大约呈等差递增，如此持续下去，直至布满整个平板。用光学显微镜观察，红色环部分由大量宽 0.8μm、长 2～4μm 的小个体细菌堆积而成；黄色环部分由宽 0.7μm、长约 20～80μm 的大个体细菌组成，该部位细菌数量少而运动活泼。实验结果表明，在固体培养基上，群体细菌生长的整个过程中，细菌不是同步分裂而是混乱无序地增殖，但出现的群体形态结构却表现出精确的时空变化，这种混沌态增殖过程表现出有序形态学现象正是非线性生长的动态特点，它是生命活动与形态学一致的基础，在微生物学领域里可能是普遍现象。当以绿脓杆菌为研究对象控制适当生态条件，也同样出现细菌群体活动的周期现象。它表现为绿色宽同心环紧密相连向外扩展，中心部圆而色浅，自培养起约 40h 出现第一环，之后每隔 12h 增加一环，环色泽由内向外有减弱趋势，各圆半径由小到大呈等距递增。同心环是靠色素深浅显示，深浅环的差别是色素多少不同所导致的，同一环中的细菌产色素能力大致相同，表现出细菌生理功能的整体性。它有助于群体生长的周期性形态结构的出现。

图 2-3　杆菌菌落的生长

2. 生物波

微生物群体增殖以同心环方式周期性地结构递增，对每个同心环细菌分裂测定显示：当出现第二环时，第一环增殖即渐渐停止，以此由内向外规律性扩展，其本质是一种波形状态的生命活动非线性动态伴随的混沌增殖，它表现出精确的时空变化形式，称之为生物波。在实验条件下对变形杆菌和绿脓杆菌表现的波状结构进行测量的结果表明，绿脓杆菌的最大波速为 0.09mm/h，周期为 12h，波长为 1.1mm；变形杆菌的周期较短为 3h，波长为 1.3mm，波速 0.43mm/h。可见不同种的微生物在各自适宜的条件下都有自己独特的生物波表现。

生物波是细菌群体生长所表现的一种新的性质，一种有序状态的实现，是细菌群体在一定条件下由微观混沌显示为宏观有序。在生物波形成的整个过程中，各细菌细胞分裂增殖是以非同步方式进行的，也无法控制各个细菌分裂的速度，从而呈现为混沌状态，最终结果的有序性可从两个方面表现出来：其一是深浅色带交替出现的同心圆的规则外观；再者每个同心圆带中细菌增殖也以一定顺序完成。对深色带的内外两侧细菌增殖测定表明在同一带中细菌生长也很有规律，内侧细菌增殖开始早而停止亦先于外侧，如此从内向外完成每条带的有序形式。生物波的形成机理的演化条件一般有以下三个：

(1) 必须是开放系统。细菌生长形成的菌落作为反应系统与外界环境发生相互作用，菌落一经形成，无论大小都会与环境发生能量和信息的交流。

(2) 系统须远离平衡状态。反应系统与生态环境间物质能量的交换以及源于物质扩散的系统与外界区域间物质梯度的形成，减少了系统内熵，系统内部产生负熵，当达到一定值时，系统转为有序状态。绿脓杆菌从培养 40h 后开始进行周期性稳定生长，正是非平衡态形成对细菌群体活力增强的一个佐证。

(3) 非线性相互作用。在非平衡态基础上，系统内各分子发生复杂的相互作用，形成联系网络，各个细胞协同运转出现整体效

应，表现为群体细菌形态结构和生理功能的整体改变。

八、地磁场的混沌运动

古地磁资料表明，地球的磁场不断地改换极性，而且每种极性维持的时间间隔是无规则的，这可能是由于地球内部物质与电荷的经向与纬向的两种运动耦合产生的。经向运动会产生纬向磁场，纬向运动会产生经向磁场。两个方向的运动及两个方向磁场的相互作用会产生混沌运动。用圆盘发电机理论来模拟其相互作用得如下方程组[18]：

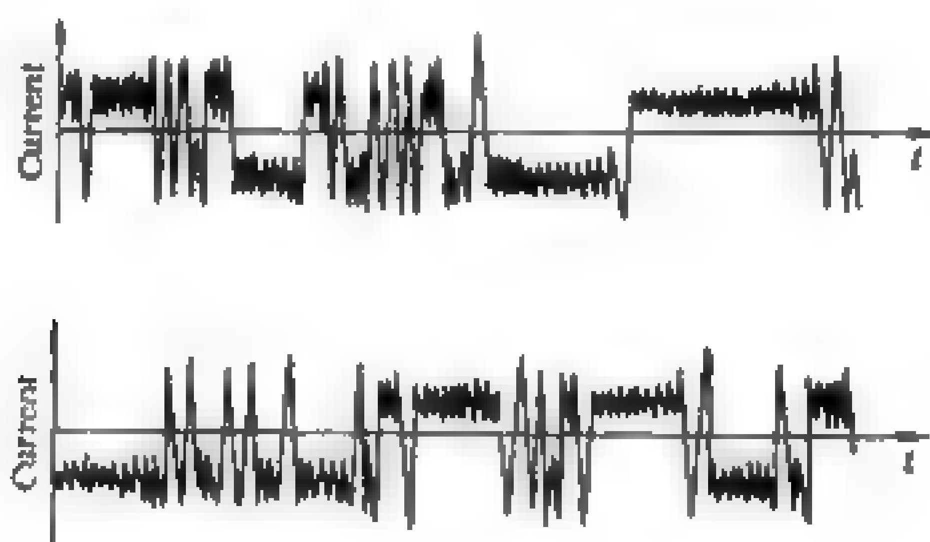


图 2-4　圆盘发电机的电流随时间的变化

$$I\,d\omega_i/dt = T - M i_i i_j \qquad i,j=1,2 \tag{2.1.11A}$$

$$L\,di_i/dt = -R i_i + M \omega_i i_j \tag{2.1.11B}$$

式中 ω_i 为角速度，i 为电流，I 为转动惯量，L 为自感，M 为互感，T 为转矩。在同一式中，下标 $i \neq j$。计算表明，式(2.1.11)确实有混沌解。图 2-4 显示了其电流随时间的变化，可以看到电流的变化是不规则的。也就是说其磁场的变化是不规则的，这个结果对于地球物理学家是很有吸引力的。

九、地震学中的混沌[8]

大地震在孕育过程中，孕震系统不断与周围介质进行能量和物质的交换，显示出很强的耗散作用和复杂的动力学行为。从时间域看，孕震过程表现为一种有时间箭头的演化，即在地震过程中的时间是不可逆的。大地震孕育过程是一个向不稳定发展的过程；而

大地震后孕震系统解体，介质处于急剧调整阶段，虽在较长时间内其时空活动有较大的起伏，但总的趋势是一个趋向于稳定平衡的过程。若以大地震发生时刻划分，这是两个不同的物理过程。它们各自表现出来的动态行为也是不同的，但又紧密联系在一起。大地震的发生应该是从无序走向有序，从简单走向复杂。而一切有序化都不具有时间反演对称性。因此，可以期望在大地震发生前后可找到某种不同的时间结构特征。

目前尚不能用非线性微分自治方程定量描述地震活动的时空、强度变化，但是地震孕育过程的复杂机理还是可以用非线性动力学来探索的。比如，从实际资料中提取的地震时间序列中或多或少隐藏着的与未来地震发生有关的信息，从中找到可能蕴藏着参与未来系统突变的痕迹。如何应用混沌和分形理论定量描述地震活动的时空复杂性，寻找大地震发生的临界行为一直是人们探索地震预测的主攻方向。多年来，地震活动在时间域和空间域的活动行为一直被定性地描述，难以分辨大震前后的动力学行为。研究表明地震活动在某一层次上存在着幂律标度。反映了地震活动的静态特征，一般来说，大地震前，其时空活动的分布较为分散，结构稀疏。主震后，其分布密度加大且密集。可以发现有一个明显的降维过程。说明大地震前地震活动的规律确实是从无序向有序发展。

"地震究竟是混沌现象还是决定性的?"曾作为一次国际会议的议题。地震产生的不可预测性，以及对初始条件的高度敏感性正是混沌动力学的特征。地震发生的频次按震级分布的 Richter 对数律也与一种分维不变集上的概率分布相一致。同时，断层的大小尺寸分布、断层的地理分布结构，甚至断层凿孔的纹理分布都是分维的。所以地震构造系统可以被看作为一种多层次的分维谱系结构，地震物理学家已把地震体系作为一个宏观动力系统，提出适当的模型以尝试从非线性动力学推出观察到的混沌特征。由于地震活动的高度复杂性，迄今为止，寻求适当动力学模型的努力还处在初级阶段。如果把地震作为一种事件，而着眼于地震发生和再现的时间序列规律。揭示地震活动在重现规律方面的混沌与分维特征，

也是对地震活动本质的一种有益尝试，显示了非线性动力学理论在地震学研究中的应用前景。

第二节 凝聚态物理中的混沌现象[9]

凝聚态物理中耦合或周期外力驱动的非线性振子模型非常多，它们的行为也显示出混沌现象。其中魔梯和波矢竞争的表现就比较典型。

一、魔梯

魔梯现象与物理系统存在两个相互竞争的周期性有关。竞争周期性有两种不同类型：一种为频率竞争，另一种为波矢竞争。

存在两个竞争频率的耗散动力系统经常出现一种称之为锁相、锁频或者共振的现象。17世纪荷兰物理学家Huygens已经注意到，背对背挂在墙上从而发生耦合的两只钟接近于同步运动。这是一种耦合阻尼振子。另外，受外周期力驱动的阻尼摆，比如图2-5中所示的被人推动的秋千，也倾向锁定于公度运动之中。耦合阻尼振子和驱动阻尼摆是等效的。当不存在阻尼和

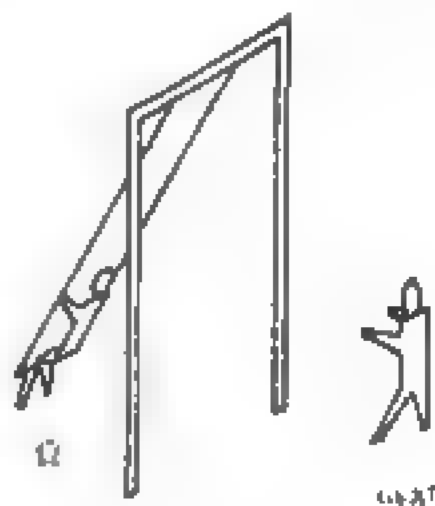


图2-5 秋千

周期力时，单摆有一个自然振动频率；而周期力提供了一个外加驱动频率。一般而言，共振或者锁相出现于一个振子的谐振频率 $P_{\omega 1}$ 接近于另一个振子的某个频率 $Q_{\omega 2}$。改变某个参数，如摆长或者驱动频率等，系统可能进入两个频率之比是有理数的锁相状态，或者是无理数的非锁相状态。弱耦合情况下，锁相区间比较窄，对大多数驱动频率，运动是准周期的，也就是非锁相的。耦合增强时，锁相区间增加，而在耦合达到某个阈值之后，系统可能进入混沌状态。这种通过两个竞争进入混沌的过程已在许多非线性耗散系统中被观察到。这是不同于倍周期分叉进入混沌的另一条通向混沌的道路。

外周期力驱动的阻尼摆是非线性耗散动力系统的典型模型，其二阶微分方程为

$$\alpha\ddot{\theta}+\beta\dot{\theta}+\gamma\sin\theta=A+B\cos\omega t \tag{2.2.1}$$

θ 是离开平衡位置的角变量或相位，α 是质量，β 是阻尼系数，γ 是重力场作用，A 是常数扭曲幅度，B 是外驱动力振幅。这个方程看上去很简单，却很难求得其解析解。适当选择系数，其相空间中的运动轨道可能是极限环，或者收缩至一个固定点。当 $B\neq0$ 时，B 的大小对微分方程的解有明显的影响。我们可能得到周期、准周期和混沌解。其动力行为十分复杂。它不仅依赖于参数选择，还与初始条件有关。值得注意的是，在耦合的某个临界值处，如果我们缓慢地改变驱动频率，单摆将逐次锁定于各个频率之上，形成台阶的无穷序列，由于在两个有理数之间存在无穷多个有理数，所以在两个台阶之间也有无穷多个台阶。这种奇特的行为具有一定的普遍性，反映了所谓魔梯(devils' staircase)现象，如图 2-6 所示。如果把图上曲线的一部分放大，所产生的曲线非常像原始的曲线，具有分形的自相似性。它表现出混沌在结构上的重要特征。

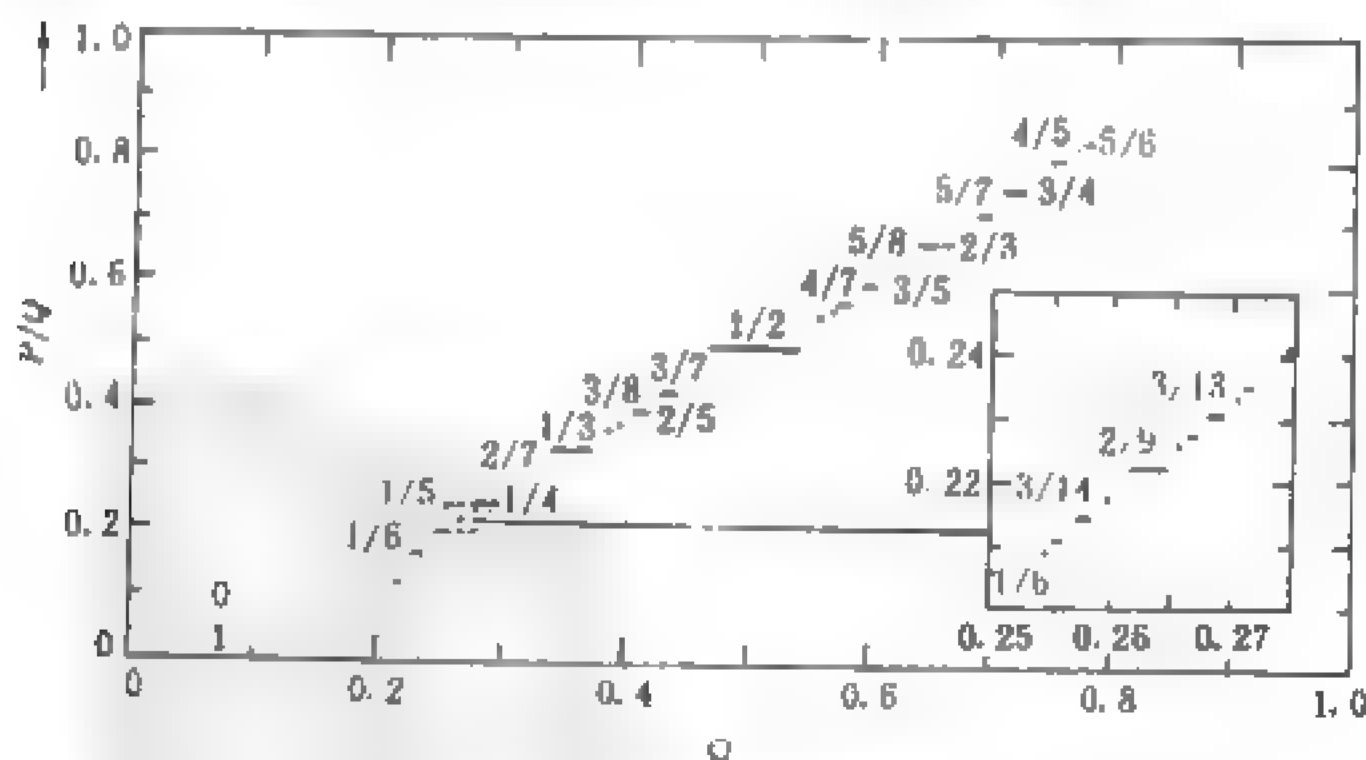


图 2-6　圆映象的完整魔梯

微波场中电阻电容分路 Josephson 结的动力学方程是

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\theta}+\frac{\hbar}{2eR}\dot{\theta}+I_c\sin\theta=A+B\cos\omega t \tag{2.2.2}$$

这里 θ 是结两端超导体的相位差，C 是电容，R 是电阻，A 和 B 分别代表穿过结的常值电流和微波电流振幅。如果令 $\alpha=\hbar C/2e$，$\beta=\hbar/2eR$，γ 代表临界电流 I_C，那么方程(2.2.2)与(2.2.1)是完全相同的。这种动力学过程的对应关系，使得 Josephson 结的实验结果出现如图2-7的魔梯结构。

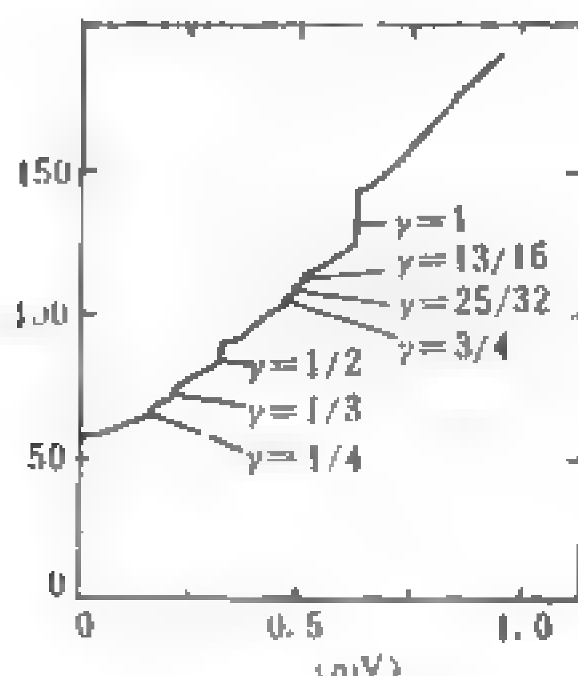


图2-7　Nb-Nb　Josephson 点结在295GHz 微波场和温度4.2K 时的 I-V 曲线

二、波矢竞争

上面讨论了竞争在时间的两个周期或频率上进行的行为。由于在连续性和平移变换特征上，时空存在着一定的对应性，从而在空间的两个波矢之间也存在着竞争。尽管两者处理的物理现象可能完全不同，但它们依据的数学描述有相似性。在凝聚态物理学中所碰到的属于空间分布的对象一般都定义在分立点阵上，因此对于波矢竞争的研究可以直接采用分立映象。下面介绍一个同样具有魔梯特征的长程反铁磁一维 Ising 模型。

处在外磁场 H 中具有长程反铁磁相互作用的一维 Ising 模型的 Hamilton 量为

$$H=-\sum_i Hs_i+\sum_{i,j}J(i-j)(s_i+1/2)(s_j+1/2) \tag{2.2.3}$$

这里外磁场 H 在赝自旋场合可以代表背景作用，$s_i=\pm1/2$规定了

两个不同的结构或状态，$J(i-j)$规定两个自旋或赝自旋之间的互作用。若假定是反铁磁相关，而且是 n 的凸函数，则 $J(n)$总是正的，满足

$$J(n+1)+J(n-1)-2J(n)>0 \tag{2.2.4}$$

当 $H<0$时，基态表现为所有自旋 $s_i=-1/2$，而当 $H>2\Sigma J(i)$时，基态是 $s_i=+1/2$，因为这时倒转一个自旋就要损耗能量。需要详细研究的问题在于 H 位于两个极端情况之间的基态构形。

具体分析可分成两步。第一步是对于向上自旋的给定比率 $q=N+/N$，找出能量极小的构形。结果是向上自旋应尽可能平缓地分布。第 i 个向上自旋的位置由公式

$$x_i=\text{Int}(i/q) \tag{2.2.5}$$

给出。实验发现许多结构都可以用方程(2.2.5)来表达。当向上自旋分量等于黄金分割值$(\sqrt{5}-1)/2$时，实际上给出了一维准晶结构。第二步是对具有向上自旋的有理分数 $q=P/Q$ 的构形稳定性进行计算，可以求得相对于外场 H 存在一个结构稳定的区间。其宽度由

$$\triangle H(P/Q)=\sum_{k=1}^{\infty}kQ[J(kQ+1)+J(kQ-1)-2J(kQ)] \tag{2.2.6}$$

给出，条件(2.2.4)保证了对所有的 P 和 Q，$\triangle H(P/Q)$总是正的。可以看到稳定区间实际上只依赖于 Q。对于所有的稳定区间求和，可以发现它们填满整个 H 轴，魔梯是完整的。由于 q 与平均自旋$\langle s\rangle$存在关系$\langle s\rangle=q^{-1/2}$，故由 q 与 H 标志的魔梯就是相图，参见图2-8。图2-8是取 $J(n)=1/n^2$而得的魔梯。最稳定的中间相是$\langle s\rangle=0$，即 $q=1/2$的反铁磁体。其标度性质可以用Cantor 集合的分维 D 来表达。长程反铁磁相互作用一维 Ising 模型可用于描述石墨层化合物、混合堆垛有机电荷转移化全物、铁磁体等材料的性质。

魔梯现象反映了系统在存在两个相互竞争的周期性时在时间和空间上的动力学行为。时间和空间之间有对应性，但不是关联的。而存在着时间和空间相关的广延耗散动力系统广泛地存在于

物理学、生物学、地质学甚至社会科学的各个领域，目前关于这些复杂系统的空时演化过程还所知甚少。这里出现两个方面似乎独立但实际上可能相联系的重要现象，其普遍性需要找到统一的根本性的解释。第一方面是表现为$1/f$噪声的时间效应。它可以在系统的输运过程中普遍地被检测到，比如通过电阻体的电流，沙漏中的沙流，太阳黑子的活动和货物交换的价格指数等。这些系统里某个量的低频功率谱在不同的时间尺度上表现出幂律行为f^{β}。这种广泛出现的$1/f$噪声至少还没有一般的理论解释。第二方面是涉及具有分形特征的空间结构，在第三章中可以看到一些分形的实例，它们都有标度不变的自相似性。对于非线性动力学最后难题的湍流是集上述两种效应于一身的复杂现象，其显著特征是在几个数量级上存在时间和空间的相关。对于这些问题的讨论超出了本书的范围，有兴趣的读者可查阅第六章后的参考文献。

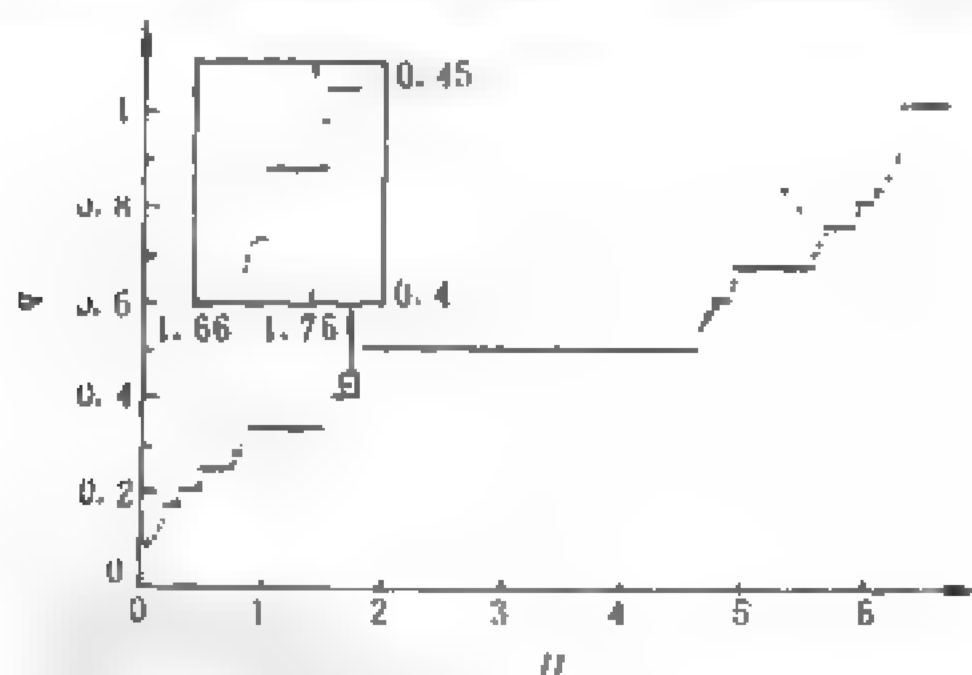


图2.8　$J(n)=1/n^2$时 Ising 模型的魔梯

第三节　经济学中的混沌现象

社会与经济系统远比物理、生命系统复杂，因而产生混沌的可能性更大，也更容易被观察到。但由于其特殊的复杂性，使我们又难以刻划和把握。下面给出社会经济系统中几个比较典型的混沌现象。

一、蛛网模型[10]

经济学必须研究商品的数量、价格及其交换。商品必须在市场上买卖。在每个市场上，一群人或团体在买，另一群人或团体在卖。假定只有一种特定商品的市场。此单个市场模型的变量是需求和供给的价格和数量。可用大写字母来表示，如 P 表示一种商品的价格。通常在字母上加一短横表示某种均衡值，如 $\bar{P}$ 表示均衡价格。对均衡值的离差可用相应的小写字母来表示，如，$p=P-\bar{P}$，表示价格对均衡值的离差。

变量应当能够反应时间的变动。在期间分析中，我们把一个交易称为一个期，本次交易称为本期或现期，上次交易为上期或前期。连续的期间用 $t=0,1,2,\cdots,t,\cdots$ 表示，变量的各期对应值加下标，如，$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_t,\cdots$ 表示各期的价格。这种记号从始期开始向前推广到全部期间区域。按照相反方向进行也很容易。如果 t 为本期，那么 $(t-1)$ 为上一期，$(t-2)$ 为再上一期，…，直到0。本期价格为 P_t，上一期价格为 P_{t-1}，等等，直到始期价格为 P_0。在连续分析中，假定变动是连续发生的。变量 t 表示时间，$t=0$ 表示初始时间，$t>0$ 表示以后时刻。这样变量表现为时间的函数，例如，$P(t)$ 表示 $t(t\geqslant 0)$ 时的价格，$P(0)$ 表示 $t=0$ 的初值。$P(t)$ 这类函数常为连续函数，但是也可能是阶梯函数。变量通过函数关系连接起来，它们通常包括某些常数和参数，这些参数可能是固定不变的，也可能是可变的，要根据分析的发展而定。

在某种单一商品市场上，需求函数为 $D=D(P)$，供给函数为 $S=S(P)$，都是商品价格 P 的函数。在均衡情况下，价格必须使市场上的商品全部出清：

$$D(P)=S(P) \tag{2.3.1}$$

由这一方程可求出均衡价格 $\bar{P}$，而相应的购买量和销售量可写作 $\bar{X}$：

$$\bar{X}=D(\bar{P})=S(\bar{P}) \tag{2.3.2}$$

当需求方面或供给方面出现滞后时，就可以求得动态模型。期间分析的最简单的模型具有固定的滞后现象，在供给方面延滞一

期：

$$D_t = D(P_t) \quad (2.3.3A)$$

$$S_t = S(P_{t-1}) \quad (2.3.3B)$$

其中(2.3.3A)式表明现期需求依赖于同期价格，(2.3.3B)式表明现期供给依赖于前期价格。这里假定生产某种商品既不是瞬时的，也不是连续的，而是有一个固定的生产周期(如农产品，一年一个收成)。这个一定的时间被选作分析的期间。这种模型的作用是：已知上一期的 P_{t-1}，则本期市场上的供给量是 $S(P_{t-1})$，P_t 使供给量正好全部出清，即，P_t 以及购买量和销售量都从下式中求得：

$$X_t = D(P_t) = S(P_{t-1}) \quad (2.3.4)$$

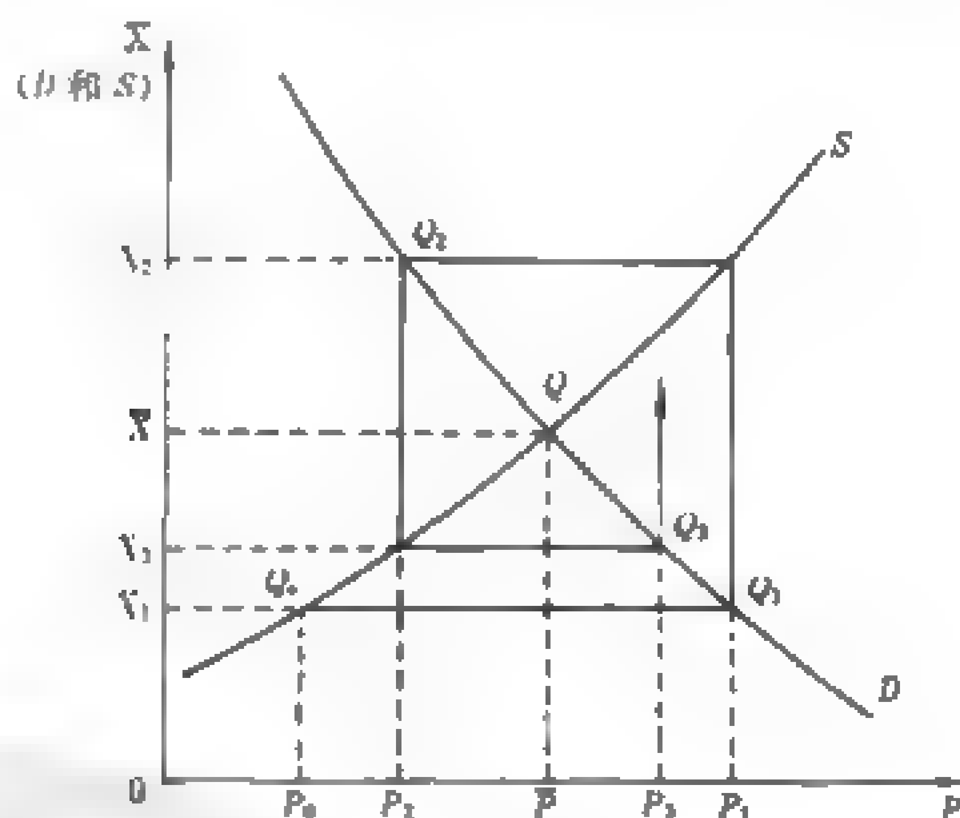


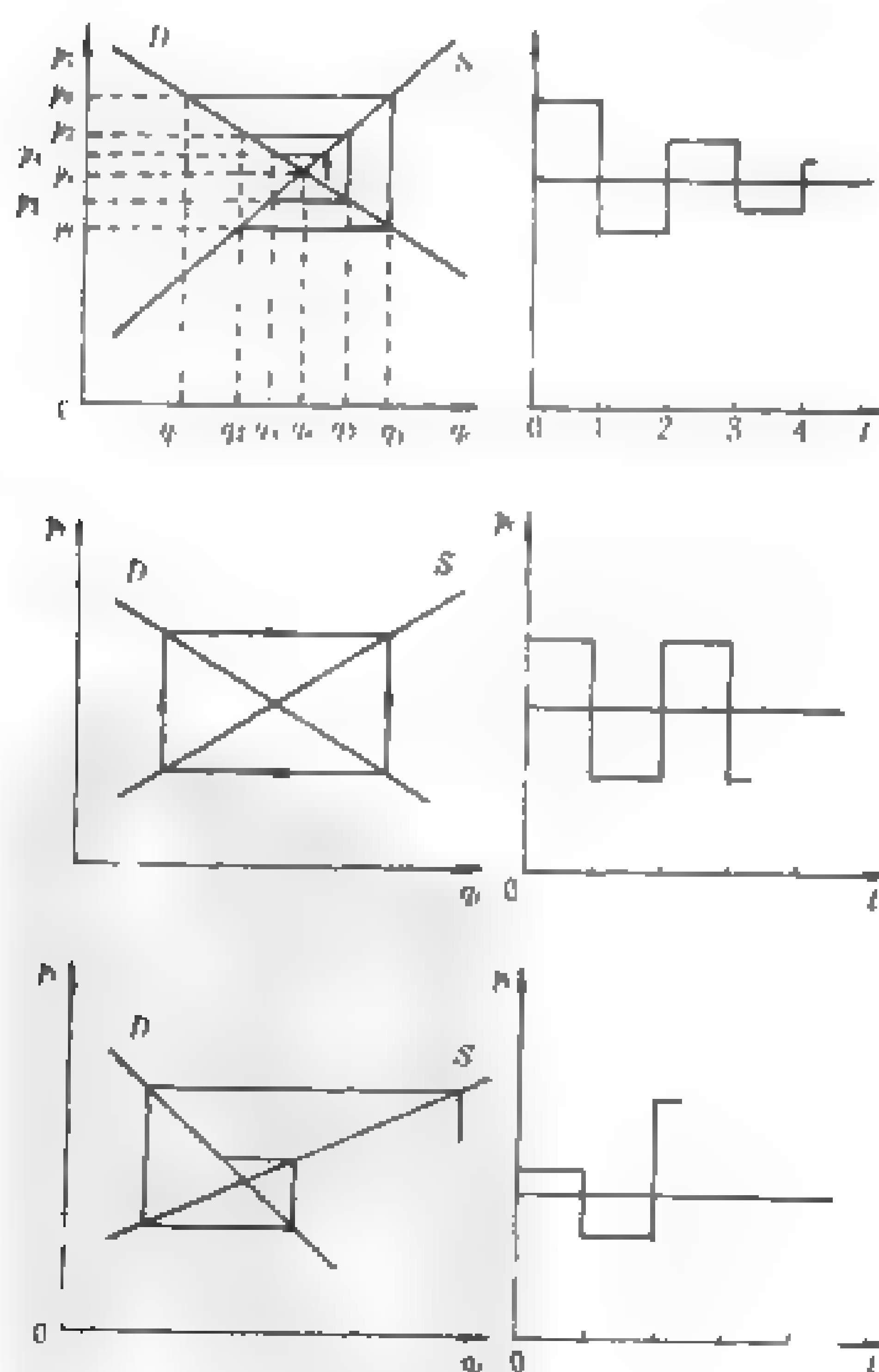
图2-9　蛛网法图示

所以，初始价格 P_0 出发，由方程得出 P_1 和 X_1；已知 P_1 时，又由方程得出 P_2 和 X_2，等等。一般地说，P_t 的系列是从一阶差分方程(滞后一期)求得：

$$D(P_t) = S(P_{t-1}) \quad (2.3.5)$$

解法可以用图形说明(图2-9)。D 和 S 分别为需求曲线和供给曲线。均衡点($\bar{P}$,$\bar{X}$)交于点 Q。在动态模型中，D 和静态场合相同，而 S 按其高度表示期间中即将到来的供给量，价格按照上一期通

行价格计算。初始价格为 P_0。由曲线 S 上的对应点 Q_0 得到期间1的供应量，这一供应量按照曲线 D 上的 Q_1 所给定的价格 P_1 全部出清，Q_1 和 Q_0 处在同一高度(X_1)。在期间2中，首先从 Q_1 垂直地向上移动到曲线 S 上的一点(得出 X_2)，然后水平地向左移动到曲线 D 上的 Q_2(得到 P_2)。这个过程连续进行下去，便得到图2-9表示的蛛网形状。各个连续期间的价格和数量(购买的和销售的)是需求曲线 D 上的点 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ 的坐标，在这一场合，点的序列在 Q 两侧交替变动，趋近于 Q。因此，价格 P_t 在 $\bar{P}$ 的两则交替变动，并趋近于 P。购买量和销售量(X_t)也呈现相同的趋势。假设 D 向下



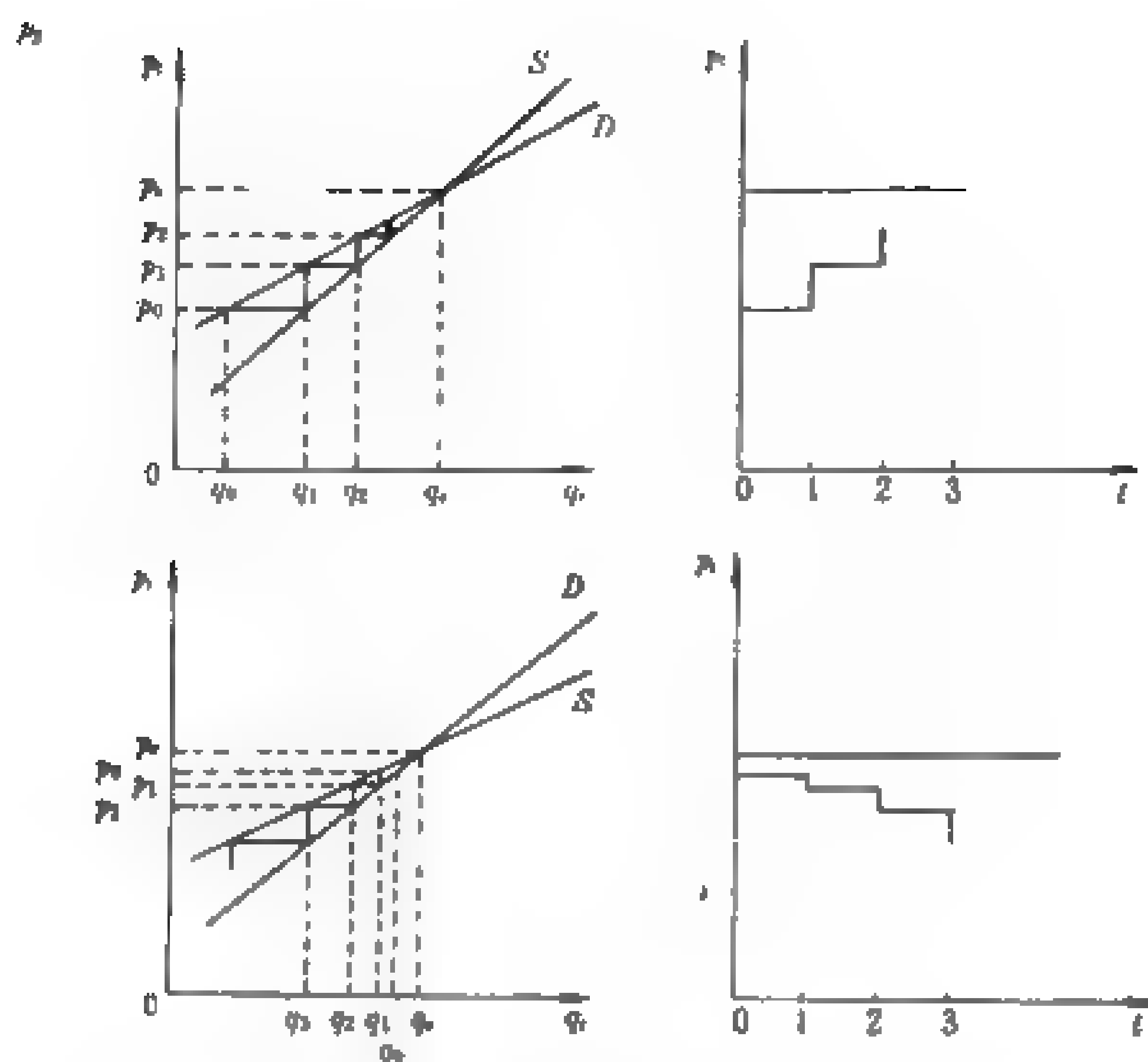


图2-10　商品价格运动的不同情况

倾斜，S 向上倾斜，显然可以直觉地看出：围绕着均衡点 Q 上的曲线 D 对 OP 轴的倾斜程度大于曲线 S 时，就会出现阻尼振荡，收敛于均衡点；当曲线 D 对 OP 轴的倾斜程度小于曲线 S 时，就会出现增幅振荡而发散；当 D 和 S 的倾斜程度相等时，就既不会出现阻尼振荡，也不会出现增幅振荡，而是出现规则振荡，形成周期解。图2-10显示的是当需求曲线和供给曲线性时，模型出现的各种振荡收敛、发散以及周期运动情况。当然，既不收敛、也不发散，又不作周期循环的非周期混沌运动是经济活动中经常出现的现象。

经济学中使用的数学主要是线性理论，局部均衡分析，经济控制理论，投人产出规划，增长模型等。而绝大多数的经济现象是非线性的。经济系统的均衡稳定性问题由于非线性而一直未能很好地解决。这就促使人们提问：经济均衡是如何达到的？为什么一定要达到均衡？这些都是均衡理论的基本问题，它们的解决需要重建均衡理论的基础，经济过程的动力学研究将引起经济理论的一场

革命。也许可以这样说，经济现象的复杂性并不在于稳定性，而恰恰在于不稳定性，或者说在于这两种因素的相互作用。不均衡、不稳定可能有积极意义。对经济系统而言，某些混沌是必然的也是必要的。

二、经济学中的混沌模型[11]

毫无疑问经济学采用非线性动力学方法已是大势所趋，并已得到相当满意的结果，但仍存在不少的问题。非线性经济学的早期工作主要局限于已有经济模型的框架内引人非线性项，以探讨混沌行为出现的可能性。法国经济学家 Grandmont 于1983年用一个最简单的一维宏观经济模型，得出了与古典经济学派相反的结论：即宏观经济不规则的涨落是经济系统内在的机制而非外界的冲动所引起。当然，一维离散混沌模型时间尺度太长，不能描写真实的经济周期波动。观察混沌机制需要较多的样本数据，而对于宏观经济指数，难得有每周或每日的数据，通常是按月、季、年间隔计数，而几百个点的数据只包括几个经济波动的周期，这就只能分析低维的混沌。另外，在宏观经济指标中，除了利率、兑换率等少数经济指标的变动有一个大致的范围外，多数的宏观经济指标，如国民生产总值 GNP、工业生产指数等都有一个大致按指数增长的趋势。这是因为宏观经济系统是一个开放的系统，所以要研究经济混沌就应采用某种方法来消去增长的趋势，专注于趋势附近的局域波动。在这方面人们常用嵌人空间法（相空间重构技术）来研究经济时间序列。给定一正整数 m，对于时间序列 $X(t)$ 和时滞参数 T，在相空间中构造一个 m 维向量 $V(m,T)=[X(t),X(t+T),\cdots,X(t+(m-1)T)]$，其中 m 称为嵌人维数。这样原来的动力系统就转化为相空间中的一个动力系统。只须 m 足够大，重建的系统与原动力系统的几何性质是等价的。可通过计算其关联函数 $C_m(R)$，来判断系统是否混沌。

为了从理论上证实，必须建立严密的数理经济学模型。描述经济混沌的离散模型要求较长的时间尺度，不适合用于描述货币时间序列。而连续的微分方程系统要出现混沌行为，至少要有3维自

由度，其奇怪吸引子的分维将大于2。所以强迫振子的长波模型也不适用于描述货币时间序列。货币奇怪吸引子是在取对数并消除线性增长趋势以后所发现的。因此选取与自然增长率的偏差作为描述货币增长模型的主要变量，该偏差用 $X(t)$ 表示，有

$$\mathrm{d}X(t)/\mathrm{d}t=aX(t)+F[X(t-\tau)] \qquad (2.3.6)$$

$$F(X)=XG(X) \qquad (2.3.7)$$

其中 τ 是时滞参数，a 是扩散速度，F 是控制参数，G 是反馈函数。在货币增长时，有两种竞争机制在起作用，第一是刺激增长，它是对市场需求的及时反应，用 $aX(t)$ 表示，而 $F[X(t-\tau)]$ 代表了系统内部的控制，它由反馈信号 $X(t-\tau)$ 和反馈函数 G 组成。在闭环控制中存在时滞 τ，这是由于信息和调节管理的滞后。为进一步研究如上模型，可设

$$G(X)=-be^{-X^2/\sigma^2} \qquad (2.3.8)$$

式中 b 为控制参数，σ 是标度参数，则上面的模型可化为

$$\mathrm{d}X(t)/\mathrm{d}t=aX(t)+bX(t-\tau)e^{\ X(t-\tau)^2/\sigma^2} \qquad (2.3.9)$$

这是个含有时滞的微分方程模型，其解可以是稳定解、极限环解、多周期的长波解以及混沌解。用它可以定量地解释观察到的货币运动的基本周期、Lyapunov 指数等。说明了长期、中期、短期波动以及不规则的混沌波动共存于经济波动之中。

三、从分形角度看企业竞争力

混沌与分形有着密切的联系。在本书的后面章节中将专门讨论混沌吸引子的分形特征。在一定意义上讲，可以从分形角度来看混沌运动。

弹性是经济学中最基本的概念之一。从多重分形的角度看，弹性除了表示两个变量相对变化率的比率外，实际上是一种奇异性强度指数，表示两个变量之间的复杂程度。而多重分形谱 $f(\alpha)$ 则可表示这种复杂性在经济系统中的空间分布。宏观经济管理部门为了能更加有效地对国民经济进行管理，实施正确的宏观调控政策，必须对各个部门、各个企业的竞争能力进行估价。那么用什么办法来进行评价？哪个数量指标可刻划企业的竞争能力？以往常用

产值、利润率等指标来衡量企业的竞争能力。但是由于价格体系的原因用这些指标都不能全面地刻划一个企业的竞争能力。而且，在一个企业的初创时期或一个新产品的最初阶段，经常是利润率较低而竞争力较强。如果用分形方法来定义企业竞争力指数的函数，可减小它们受价格因素的影响。

下面先通过建立产品扩散的随机分形网络模型来设计企业的竞争力指数。假设企业只生产一种产品，该产品经过一级批发商、二级批发商、…、零售商店，最后到达消费者手中，用“0”表示企业，用“1，2，…，n”表示有 n 级批发商（第 n 级批发商是零售商店）。“$n+1$”表示消费者，设每一个 k 级批发商都将面对 N_k 个第 $k+1$ 级批发商（$k=0,1,\cdots,n$），N_k 为随机变量，用 L_k 表示由第 k 级批发商到达第 $k+1$ 级批发商所经过的距离（$k=0,1,2,\cdots,n$），$L_0=1$，$L_k>L_{k+1}$，$R_k=L_{k+1}/L_k$，它表示产品经过相邻两级批发商的距离之比为一个随机向量，$R_k=(r_{k1},r_{k2},\cdots,r_{kN_k})$（$k=0,1,2,\cdots,n$）。这样以企业、各级批发商、消费者为顶点，以长度为 L_k 的线段为边作出一个树状网络图，就构造出一个近似的随机分形网络模型。可设该树状网络由随机元素 $(N_k,R_k)=(N,r_1,r_2,\cdots,r_N)$ 生成，则该随机分形网络的分维为：

$$D=\min\{s: E(\sum_{i=1}^{N} r_i^s)\leqslant 1\} \tag{2.3.10}$$

此式从理论上给出了产品扩散随机分形网络的分维，可以由企业产品销售的有关数据，选用适当的统计方法，对分维值进行估计。为了说明分维的经济含义，将上面建立的产品扩散分形网络模型进行简化。设随机变量 N 为常数，$r_1=r_2=\cdots=r_N=r$ 也为常数，这时随机分形网络变成了一个自相似的网络，其分维 $D=\min\{s: Nr^s\leqslant 1\}$，即 $D=\log N/(\log 1/r)$，由此可知，N 或 r 增大都导致 D 增大。N 的值大，说明产品渗透范围较广，扩散空间大；r 的值大，说明产品扩散距离较远，这些都表明 D 的大小描述了产品扩散的能力，因此用 D 作为描述企业竞争能力的数量指标是有道理的。这种竞争力指数的优点还在于可以比较不同类型、不同规模、不同行

业的竞争能力，从而能为宏观经济管理部门根据不同行业、产品的竞争能力和它在国民经济中的地位和作用，对其进行正确的调节和管理。作为一个企业，可以用竞争力指数的大小，判断自身产品的竞争能力，以提高经济效益。

从几何意义上看，分维描述了树状网络图的不规则程度。从经济意义上看，分维刻划了企业产品的竞争能力、渗透能力的大小。但也应看到，虽然竞争力指数仍然是一个较粗糙的指标。比如，企业的竞争力指数可能相同，但企业产品扩散的分形网络可以具有完全不同的结构。还有上面从产品扩散的分形网络计算竞争力指数时，假设了每个消费者消费相同数量的产品，消费者之间没有有意识的信息交流。为了更全面地描述企业的的竞争能力和渗透能力，必须引入产品扩散的多重分形，并将其谱作为企业竞争能力的一个连续指标体系。

总之，通过对非线性经济学的研究，能提供大量丰富而深刻的经济信息。为统一微观和宏观经济学提供了一条可能的途径。还应该看到，经济过程的确处处有非线性，可如何刻划怎样建模仍然是一个很大的没有解决的问题。经济学中讲的周期性与物理学、数学上讲的周期性是不一样的；经济学中的混沌在其含义上与数学上的混沌有联系但也不完全等同。经济学中的混沌显得粗糙、模糊与复杂丰富。通过数学方法可以揭示出经济过程的一些本质特征，但两者还是有相当的距离；另外方程模型的局限性是很明显的，经济系统是极其复杂、不断变化的特大系统，常分为国家、部门、地区、企业、个人等多个层次，有生产、分配、交换、消费交替进行，物质流、资金流、信息流循环不断，只采用几个方程来模拟如此复杂的系统显然是不够的。还有，经济学中的数据非常的多，但真正能应用于比如相空间重构技术等卓有成效方法的数据并不多，这也是经济混沌研究至今停留在数理分析和模拟的原因之一。数理分析和模拟对经济理论研究有一定的意义，但对实际应用和经济管理的作用不应估计过高。目前在经济学中非线性系统的应用研究水平还是很低的，重点只在于演示分叉、极限环和混沌等较为简单的

现象，切实地应用于解释现实经济过程的工作还非常的少。只有"大经济理论奠定了坚实的数理基础，才能有效地指导具体的经济实践。

参考文献

[1] 陈式刚，映象与混沌，北京：国防工业出版社，1992，6页

[2] 李后强、汪富泉，分形理论及其在分子科学中的应用，北京：科学出版社，1993，58页

[3] 陈兰荪、陈键，非线性生物动力系统，北京：科学出版社，1993，69页

[4] Leon Glass & Michal C. Mackey, Princeton University Press, 1988, From Clocks to Chaos, P74

[5] Leon Glass & Michal C. Mackey, Princeton University Press, 1988, From Clocks to Chaos, P168

[6] Leon Glass & Michal C. Mackey, Princeton University Press, 1988, From Clocks to Chaos, P179

[7] 徐启旺等，微生物生长的群体、周期和波，自然杂志，15(3)：195

[8] 安镇文，分形理论及应用会议论文集，北京：中国科技大学出版社，1993，132页

[9] 冯端、金国钧，凝聚态物理新论，上海：上海科技出版社，1992，331页

[10] Allen R. Mathematical Economics. MacMillan & Co. Ltd., 1959, P14

[11] 黄登仕，非线性经济学中的混沌和分形，大自然探索，10(37)

[12] Robbins K A. A New Approach to Subcritical Instability and Turbulent Transitions in a Simple Dynamo. Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1977, 82:309

第三章　混沌的特征和测度

第一节　混沌的定性特征

混沌运动，如前所述只出现在非线性动力系统中，它是既普遍又极复杂的现象。时至今日，科学上仍没有能给混沌下一个完全统一的定义，它的定常状态不是通常概念下确定性运动的三种状态：静止（平衡）、周期运动和准周期运动，而是一种始终局限于有限区域且轨道永不重复的、性态复杂的运动。它有时被描述为具有无穷大周期的周期运动或貌似随机的运动等。混沌运动还具有通常确定性运动所没有的几何和统计特征，如局部不稳定而整体稳定，无限自相似，连续功率谱，奇怪吸引子，分维，正的 Lyapunov 指数，正的测度熵等等。为了与其他复杂现象相区别，一般认为混沌应具备以下三个主要的定性特征[1]：

(1) 内随机性：在一定的条件下，如果系统的某个状态既可能出现，也可能不出现，该系统就被认为具有随机性。通常人们习惯于把随机性的根源归结为来自系统外部的或某些尚不清楚的原因的干扰作用，认为如果一个确定性系统不受外来干扰，它自身是不会出现随机性的，这称为外随机性。但是，外随机性的观点是经不起分析和实践验证的。对某些看来完全确定的系统进行数学模拟时发现，它们能自发地产生出随机性来。天体力学中的平面三体问题就是一个著名的例子。天体力学家 Szebehely 在1981年考虑了所谓有限制的平面三体问题，发现用计算机计算一个小质量天体 m 在两个等量的大天体 M_1 和 M_2 所在的平面的垂线上运动时，来回摆动若干次以后，m 的行为变得“随机”起来，人们再也无法预测它的位置、速度及回归时间。这些“实验”结果是令人惊奇的。在原

来完全确定的系统(它用确定的微分方程描述)内部竟产生了随机性，我们称它为内随机性。混沌常被称为自发混沌、确定性的随机性等，它所强调的就是混沌现象产生的根源在系统自身，而不在外部的影响。

内随机性的另一方面是局部不稳定性。一般来说，产生混沌的系统具有整体稳定性。混沌态与有序态的不同之处在于，它不仅具有整体稳定性，还有局部不稳定性。稳定性是现代科学中一个极重要的概念，耗散结构理论、协同学、突变论等都曾以稳定性分析为基础来讨论旧结构失稳和新结构产生的过程。所谓稳定性就是指系统受到微小扰动后保持原状态的属性或能力。显然，一个系统的存在是以结构与性能相对稳定为前提的。但是，一个系统要进化，要达到一个新的演化状态又不能将稳定性绝对化，而应在整体稳定的前提下允许局部的不稳定，这些部分不稳或失稳正是进化的基础。在混沌运动中这一点表现得十分明显。所谓局部不稳定性是指系统运动的某些方面(如某些维度上)的行为强烈地依赖于初始条件。比如由 Lorentz 在气象研究中所发现的对初始条件的敏感依赖性，可以形象地比喻为仅仅由于几千公里以外的一只蝴蝶翅膀的小小扇动，就有可能使得气象学家无法预测一个月以后的天气情况。

(2) 分维性质：混沌态具有分维性质，但其非整数维不是用来描述系统的几何外形，而是用来描述系统运动轨道在相空间的行为特征。当我们用“相空间”来表示系统所有可能的状态时，系统的变化在相空间中可用一条轨道或来描述。混沌运动在相空间中的某个区域内无限次的折叠，构成一个有无穷层次的自相似结构——奇怪吸引子。(奇怪吸引子将在第五章作专门介绍。)

(3) 普适性和 Feigenbaum 常数：混沌是一种无周期性的“高级”有序运动。如果数值的或实验的分辨率足够高，可以发现混杂在小尺度混沌中的有序运动花样。在研究混沌的转变中，出现某种标度不变性，代替通常的空间或时间周期性；所谓普适性，是指在趋向混沌时所表现出来的共同特征，它不依具体的系数以及系统

的运动方程而变。文献中常常提到的普适性有两种，即结构的普适性和测度的普适性。前者是指趋向混沌过程中轨线的分叉情况与定量特征不依赖于该过程的具体内容，而只与它的数学结构有关；后者指同一映象或迭代在不同测度层次之间嵌套结构的相同，结构的性态只依赖于非线性函数幂级数展开式的幂次。混沌的这种普适性，为人们研究和把握它带来了许多方便。只要研究一种最简单的模型，就可以将所得的结论放心地运用到同类运动形态中去。著名的 Feigenbaum 常数就是通过对 Logistic 方程的研究而得到的。系统在通向混沌的道路上，最常见的方式是倍周期分叉方式。它反映了系统在趋向混沌时的一种普遍的动态不变性。在趋向混沌时，把标尺缩小或放大，看到的仍然是相似的"几何结构"。如果把系统每次分叉所对应的参数值分别记为 a_n，a_{n+1} 等，那么式 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+2}-a_{n+1}}$ 的值，对不同的迭代次数 n 是不同的，但是当 $n\to\infty$ 时，此比例式存在一个极限值，如前言中所述，它是一个无理数并称为 Feigenbaum 数 δ。它是一个与具体迭代形式无关的普适常数。可以验证，对于以下一些一维迭代式，均可求出同样的 Feigenbaum 常数

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n) \tag{3.1.1A}$$

$$x_{n+1}=a\sin\pi x_n \tag{3.1.1B}$$

$$x_{n+1}=x_n\exp[\mu(1-x_n)] \tag{3.1.1C}$$

它正是混沌现象深层规律性的一种体现。在混沌运动中发现自然常数的意义是十分深远的，在物理学中普朗克常数 h、光速 c 的发现都已作为物理学理论发展的一个重要的里程碑。Feigenbaum 常数 δ 等的发现标志混沌理论的相对成熟。

系统的混沌运动来自于系统的非线性性质，但应该注意到，非线性只是产生混沌的必要条件而非充分条件。混沌至今仍无一个公认的普遍适用的数学定义，在混沌的研究中，人们提出如下一些基本问题[2]：

(1) 能否断言一个给定系统将展示确定性混沌？

(2) 能否用数学语言说明混沌运动并对它作定量刻划？

(3) 混沌在科学的不同分支中的影响是什么？

(4) 混沌运动的存在，说明对某些非线性系统作长期预报是不可能的。那么，我们还能从混沌信号中知道些什么？

本章下面几节将着重从定量角度刻划混沌的一些手段。其中包括 Lyapunov 指数、拓扑熵、功率谱以及分形和分维。

第二节 Lyapunov 指数

上节介绍了混沌的定性特征。本节引入 Lyapunov 指数[3]来定量刻划混沌运动。

δx_0 n 次迭代 δx_n

,----|==========>|----|

$x_0 \; x_0+\delta x$ $f^n(x_0) \; f^n(x_0+\delta x_0)$

图3-1 Lyapunov 指数的定义

正的 Lyapunov 指数是混沌的主要特征。对一维映射

$$x_n = f(x_n) \tag{3.2.1}$$

来说，一维映射只有一个拉伸或压缩方向。考虑初值点 x_0 和它的近邻 $x_0+\delta x$，用 $f(x)$ 作一次迭代后，它们之间的距离为 $\delta x_1 = f(x_0+\delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\delta x$，经 n 次迭代后会指数分离（参见图3-1）。Lyapunov 指数就是量度这种分离性。

$$\begin{aligned} \delta x_n &= |fn(x_0+\delta x) - fn(x_0)| \\ &= \frac{\mathrm{d} f^n(x_0)}{\mathrm{d} x}\delta x_0 = e^{\lambda(x_0)n}\delta x_0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

式中 $\lambda(x)$ 就称为 Lyapunov 指数

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\log\left|\frac{\mathrm{d} f^n(x_0)}{\mathrm{d} x_0}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\log\left|\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right| \end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\log\left|\sum_{i=0}^{n-1}f'(x_i)\right| \tag{3.2.3}$$

Lyapunov 指数作为沿轨道长期平均的结果，是一种整体特征，其值总是实数，可正可负，也可等于零。一维映射只有一个 Lyapunov 指数。它可能大于、等于或小于零。正的 Lyapunov 指数表明运动轨道在每个局部都不稳定，相邻轨道指数迅速分离。轨道在整体性的稳定因素(有界，耗散等)作用下反复折叠，形成混沌吸引子。因此，$\lambda>0$可以作为混沌行为的判据。$\lambda=0$对应稳定边界，初始误差不放大也不缩小。负的 Lyapunov 指数表明相体积收缩，轨道在局部是稳定的，对初始条件不敏感，对应周期轨道运动。λ由负变正，表明运动向混沌的转变。图3-2是根据式(3.2.2)Lyapunov 指数定义算得的抛物线映射的 Lyapunov 指数与参量μ的关系。图中反映了参量μ区间(1,2)上1万个点的计算结果，每个参量值取1000个轨道点求平均。图中每处下降标志一个周期窗口。Lyapunov 指数经过零的情形有三种：① 在倍周期分叉点，由负值接近零，再变为负值；② 在切分叉处，由正值经零变为负值；③ 在倍周期分叉序列的极限点，由负值经零变为正值。

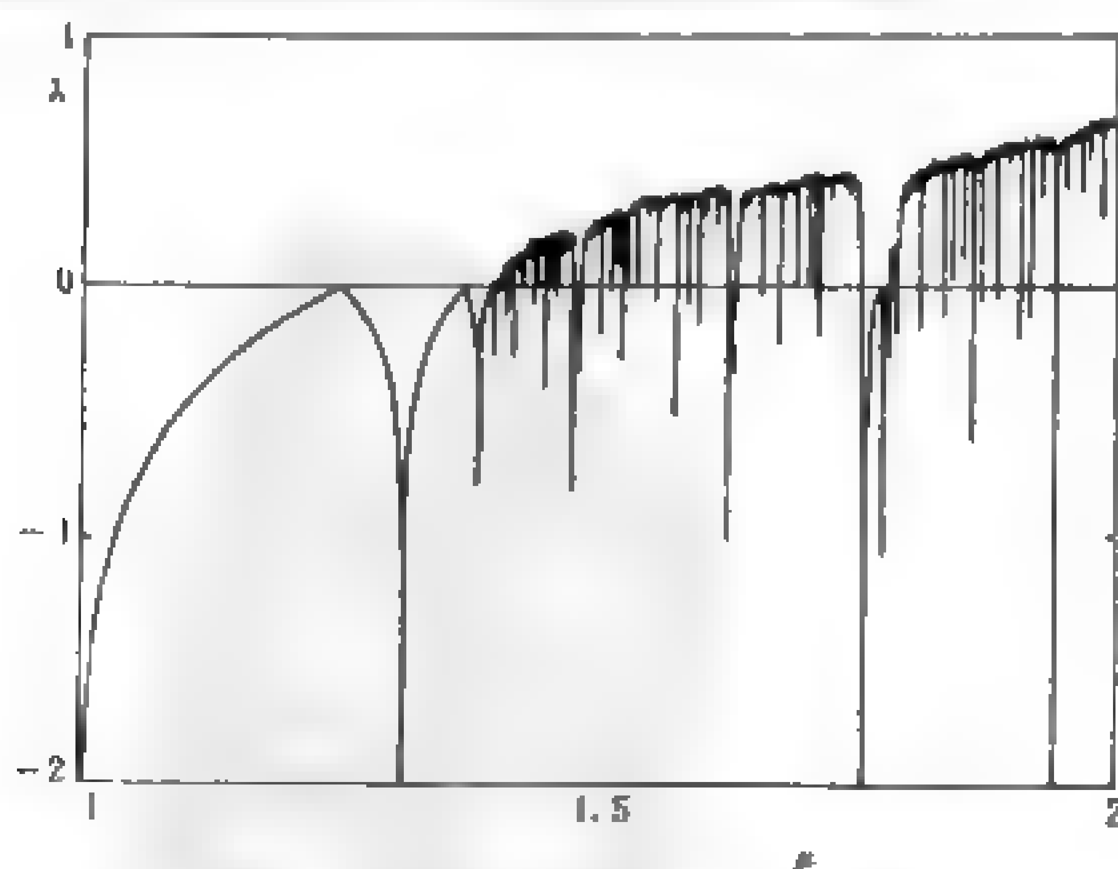


图3-2 抛物线映射的 Lyapunov 指数

正的 Lyapunov 指数也就是信息量的损失。例如考虑一维映

射，设 x_0 为初值，它以相同的几率 $p_i=1/N$ 出现在将[0,1]N 等分的小区间内。则测量 x_0 的信息量为

$$I_0=\sum_{i=1}^{N}p_i\log p_i=-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\log\left(\frac{1}{N}\right)=\log N \qquad (3.2.4)$$

若概率 p_i 越小，即区间[0,1]分得越细，x_0 落在哪个区间就知道得越少，那么就包含有较多的信息。即测量上增加了分辨率也就提高了信息量。减少 N 到 $N=1(p_i=1)$，那么 x_0 就一定落在[0,1]内，这是一个确定的结果，因而信息就等于零。

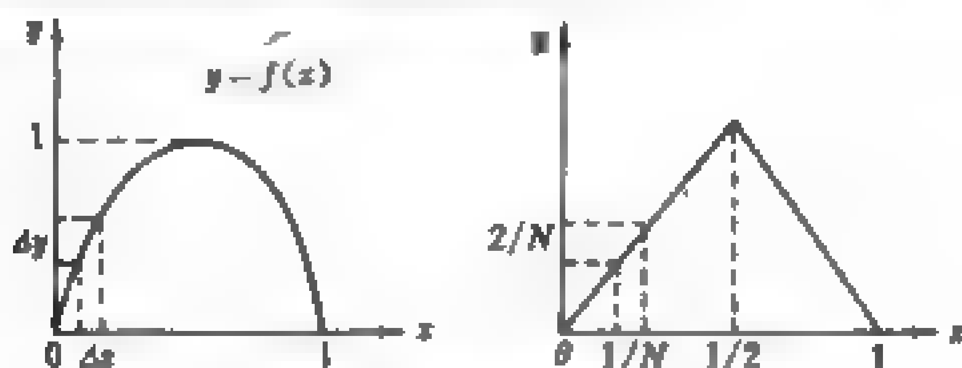


图3-3 映射的信息损失

那么 x_0 经过映射以后，信息又如何变化呢？从图3-3可以看到，x 轴上的小区间 Δx，经映射后变为 y 轴的 Δy，若斜率愈大，则 Δy 也就愈大，所提供的信息愈少。对如图3-3中的帐篷映射[4]

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & 0\leq x_n\leq 0.5\\ 2(1-x_n) & 0.5<x_n\leq 1\end{cases} \qquad (3.2.5)$$

由于斜率等于2，因而概率增加一倍，导致信息损失，一次迭代后的信息变化为

$$\Delta I=I_1-I_0=-\sum_{i=1}^{N/2}\frac{2}{N}\log_2\frac{2}{N}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\log_2\frac{1}{N}$$

$$=-\log_2 2=-1\text{bit}=-\log_2\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|=-\log_2|f'(x)| \qquad (3.2.6)$$

即信息量减少1bit。将上述表示推广，则多次迭代的平均信息损失为

$$\Delta I=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log_2|f'(x)| \qquad (3.2.7)$$

正比于 Lyapunov 指数

$$\lambda(x_0)=\log_2|\Delta I| \qquad (3.2.8)$$

Lyapunov 指数与信息损失间的上述关系式，给出了混沌的一

个初步刻划。$\lambda(x_0)<0$意味着信息不断产生，而$\lambda(x_0)>0$意味着信息损失或破坏。

从上面的推导中可以看出，仅仅观测相空间中的轨道，不能确保正确地刻划混沌运动；只有把分析扩充到切空间才能得到更为本质的结果。考虑 logistic 映射 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$，令 $x_n=\sin^2\theta_n$，则有

$$\theta_{n+1}=2\theta_n(\mathrm{mod}1) \tag{3.2.9}$$

这里 mod1 表示等式两边都去掉整数部分而只留小数部分。它的每次映射，相当于把 x_n 左移一位，舍去进位，右端补零。因此，从任何初值的二进制形式出发：

$$\theta_0=0.b_1b_2b_3\cdots b_{m-3}b_{m-2}b_{m-1}b_m, \qquad (b_i=0,1)$$

$$\theta_1=0.b_2b_3b_4\cdots b_{m-2}b_{m-1}b_m0,$$

……

$$\theta_{m-1}=0.b_m00\cdots0000$$

$$\theta_m=0.000\cdots0000$$

这就是说，不管从任何初值出发，经过 m 迭代后（m 为计算机字长），都会达到不动点0。显然这是得不出存在混沌运动的结论。Lyapunov 指数依据的是映射函数的导数，而不仅仅是轨道本身，从而能反映动力系统的混沌运动。为了强调这一结论下面专门讨论离散区间上满映射 logistic 方程的动力行为[5]。

一、满映射 logistic 方程在有限精度下的动力行为

有限精度下 logistic 方程的动力行为是设精度为 N 位有效数字，则在[0,1]区间上均匀分布了10^N 个数据点。也就是说，方程在[0,1]上最多有10^N+1个不重复点。那么，当迭代次数大于10^N 时，必然会产生循环。可以预见，离散区间上 logistic 方程的动力行为，不是收敛于一个不动点，就是形成一个循环。

(1) 一位有效数字：

考虑一位有效数字，则在[0,1]区间上只有11个数据点(0.0，0.1，0.2，…，1.0)。利用式(3.1.1)(在计算时使用四舍五入法)可以求出如图3-4(A)所示的连接图。可以看到各初始值最终经过1

收敛于0这个不动点。

(2) 二位有效数字：

在二位有效数字下，[0,1]区间上共有101个数据点，通过对式(3.1.1A)的计算可以得到，此时有两个不动点：0.00和0.75；另有一个循环0.12→0.42→0.97→0.12(参见图3-4C)。即最终收敛于两个不动点和一个循环。

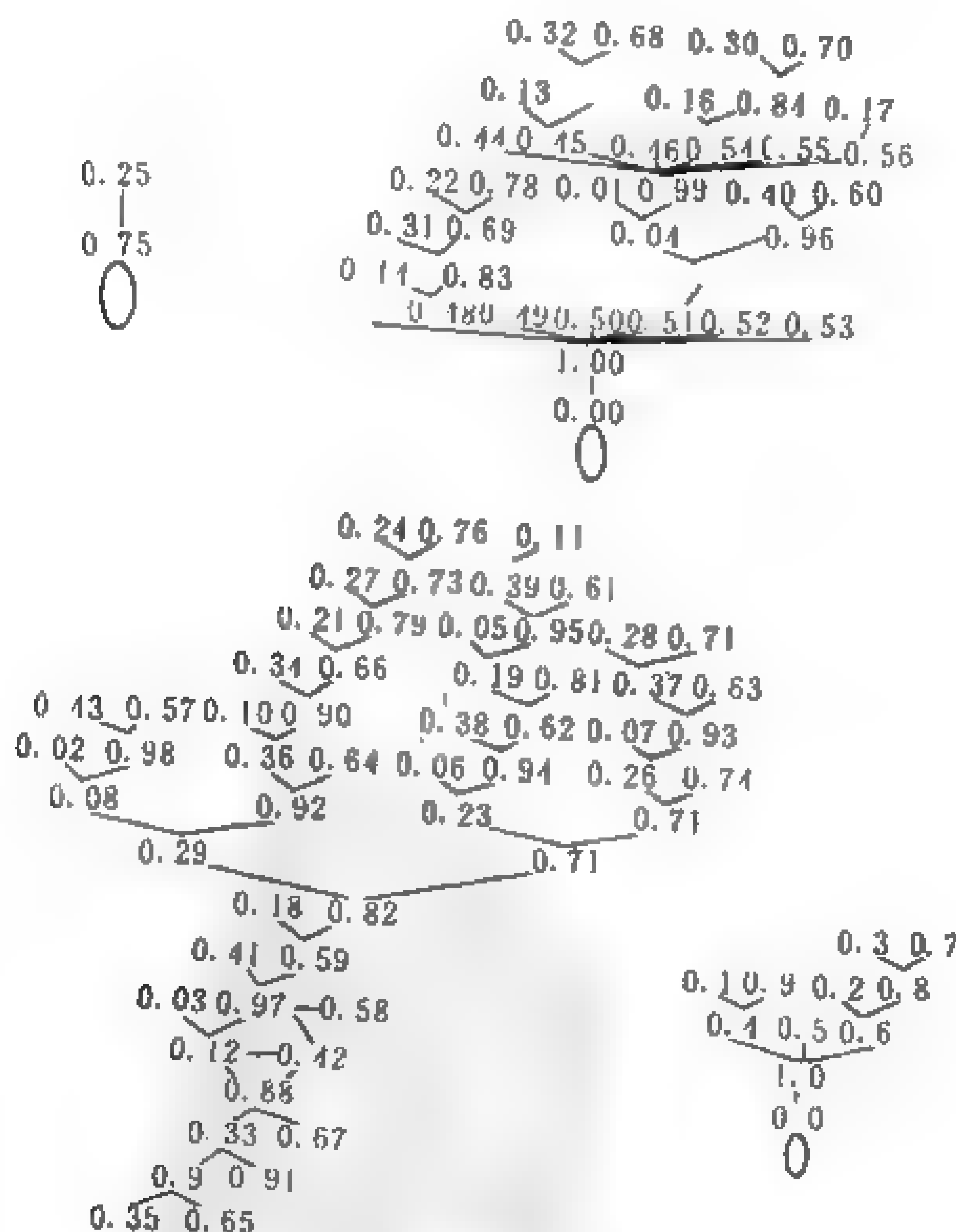


图3-4 logistic 满映射在有限精度下的动力行为

(3) 三位及三位以上有效数字：

对三位和三位以上有效数字的计算表明，它们的行为类似于一位和二位有效数字。比如在三位有效数字下，有一个13值的循环，0.109→0.388→0.950→0.190→0.610→0.946→0.204→0.650→0.910→0.328→0.882→0.416→0.972→0.109。总之，原则上在任何有限精度下都可以得到一个类似图3-4的连接图，来反映各初始数据点最后的归宿。若不是收敛于一个不动点，就是归入某一个循环。

二、满映射 logistic 方程在有限精度下的密度分布

考虑 N 位精度下当迭代次数为10^N 时的密度分布。表3-1、2、3分别列出了当 $N=1,2,3$时，在迭代次数为10^N 时的数据点密度分布：

表3-1

x_{10}	0.0
ρ	10

表3-2

x_{100}	0.00	0.12	0.42	0.75
ρ	38	20	20	2

表3-3

x_{1000}	0.000	0.109	0.190	0.204	0.328	0.388	0.416	0.616
ρ	661	6	8	6	6	6	2	7
x_{1000}	0.650	0.750	0.882	0.910	0.946	0.950	0.972	
ρ	6	258	4	10	8	8	4	

表中 x_n 为第 n 次迭代值，ρ 为相应的出现次数。可以看到结果与理论值：

$$\rho(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2} \tag{3.2.10}$$

在有效数字较小时相差较大。

上面只给出了满映射的一些结果。对于 logistic 方程中的其他参数点亦可同样讨论。由于离散区间只有有限个元素，不可能产生一个非周期轨道。实际上，把[0,1]区间里的全部有理数集中到一起也凑不成具有有限长度的线段。因为可数无穷多个点的集合，

其测度为0;整个线段几乎被不可数的无穷多个无理数所充满。满映射的绝大多数初值都导致一个非周期的轨道。然而,计算机不能处理无理数,它产生不了一个非周期轨道。它提醒我们在用计算机计算混沌轨道时不是一定能得到正确的极限轨道。从这一点上,可以看到 Lyapunov 指数在定量描述系统混沌行为时的作用。为了确切地刻划混沌状态,只有计算系统在相空间里的轨道是远远不够的,必须考察动力学系统在相空间中每一点上的小小偏离,即引入维数与相空间相同的切空间。

第三节 拓扑熵与测度熵[6,7]

混沌轨道的局部不稳定性,使相邻轨道以指数速率分离。如果两个初始点如此靠近,以致在一段时间里不能靠测量来区分两条轨道,则只有在它们充分分离后才能加以区分。在此意义上,混沌运动产生信息,信息量与可以区分的不同的轨道数目 N 有关。对于混沌运动,N 随时间指数增长

$$N \propto e^{(Kt)} \tag{3.3.1}$$

常数 K 刻划信息产生的速率,即为测度熵。测度熵由 Kolmogorov 在1958年定义。它是从我们熟悉的热力学熵概念引申而来的

统计热力学中,熵

$$s = -K_b \sum_i p_i \ln p_i \tag{3.3.2}$$

p_i 是系统处在状态 i 的概率。s 是系统无序程度的量度。无序的增加对应于状态可知性的减少。只要 $s>0$,系统总存在一些我们无法认识的侧面。

Kolmogorov 熵 K 的定义如下:考虑奇怪吸引子上动力系统的轨道 $x(t)=x_1(t),\cdots,x_d(t)$。设 d 维相空间被划分成尺寸为 l^d 的盒子,系统的状态可在时间 τ 的间隔内观察。设 $p_{i_0}\cdots,i_n$ 是 $x(0)$ 在盒子 i_0 中,$x(\tau)$ 在盒子 i_1 中,$\cdots$,$x(n\tau)$ 在盒子 i_n 中的联合概率,则有

$$K_n = -\sum_{i_0 \cdots i_n} p_{i_0, \cdots, i_n} \ln p_{i_0, \cdots, i_n} \tag{3.3.3}$$

它正比于以精度l确定系统在特殊轨道 $i_0^*, \cdots, i_n^*$ 所需的信息。因此 $K_{n+1} - K_n$ 是已知系统先前处于 $i_0^*, \cdots, i_n^*$ 而预测系统将在单元 i_{n+1}^* 中所需的附加信息，这意味着$(K_{n+1} - K_n)$量度了系统从时间 n 到 $n+1$的信息损失。K 熵定义为信息的平均损失率

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} (1/n\tau) \sum_i (K_{i+1} - K_i) \\ &= -\lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} (1/n\tau) \sum_i p_{i_0 \cdots i_{n-1}} \ln p_{i_0 \cdots i_{n-1}} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

极限 $l \to 0$说明 K 与划分的选取无关。

Kolmogorov 熵 K 在混沌的量度中很有用。对规则运动，$K = 0$；随机系统，$K = \infty$；若系统表现确定性混沌，则 λ 是大于0的常数。K 熵越大，那么信息的损失速率越大，系统的混沌程度越大。

在一维映射中，K 熵恰为正的 lyapunov 指数。例如对 Logistic 映射，Lyapunov 指数随参数而变。对规则运动，Lyapunov 指数 $\lambda < 0$；在分叉点 $\lambda = 0$；而在混沌区 $\lambda > 0$，这时的 Lyapunov 指数 λ 就是 Kolmogorov 熵。在高维系统，K 熵与 Lyapunov 指数 λ 有以下关系：

$$K = \int_x \rho(x) \sum_i \lambda_i^+(x) \mathrm{d}^d x \tag{3.3.5}$$

因为在大多数情形 λ^+ 与 X 无关，所以若式中吸引子的密度 $\rho(x)$ 不变，这时积分$\int \rho(x) \mathrm{d}^d x = 1$，则上式可简化成下面的求和

$$K = \sum_i \lambda_i^+ \tag{3.3.6}$$

即所有正的 Lyapunov 指数之和。

历史上，Kolmogorov 熵的引入先于拓扑熵。拓扑熵是比测度熵更弱的混沌判据。它不考虑相空间细分过程中的测度，而只保留计数问题。如果细分中的各个覆盖具有相同的测度（概率），则测度熵 K 就回到了拓扑熵 h。一般有

$$h \geqslant K \geqslant 0 \tag{3.3.7}$$

正拓扑熵不能保证测度熵为正，而正测度熵一定导致正拓扑熵。用

正拓扑熵定义的混沌称为拓扑混沌，它只意味着运动中含有不规则的成分，并不保证相应的混沌运动可以观测。

由于拓扑熵只由不同轨道的计数问题决定，常用下式计算：

$$h=\lim_{n\to\infty}\ln N(n)/n \tag{3.3.8}$$

式中 $N(n)$是长度为 n 的不同的轨道点的数目。

第四节　功率谱

混沌普遍存在于非线性系统里。为了识别混沌，许多学者在实验室和自然状态下对混沌识别进行了各种尝试。然而，在实际情况中，混沌的识别并非易事。在实验室系统里，噪声会与确定性的内在动力学特性发生相互作用，给理论解释带来困难。许多先前认为是噪声的过程现在又有可能认为是确定性的混沌过程；而所研究的系统中真正存在的噪声却混淆了这种可能性。噪声与混沌的区别并非一清二楚，有时甚至无法把两者区分开。

作为一个简单例子，考虑一个特别构造出来的具有指数型概率密度的有限差分方程[8]（参见图3-5A）

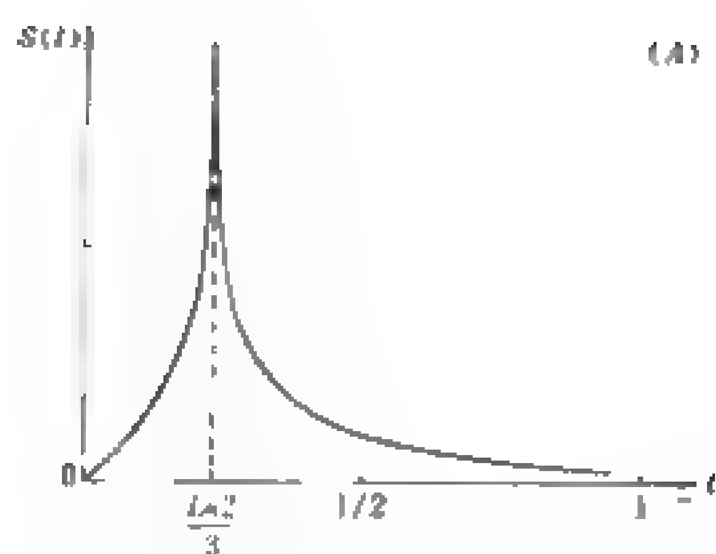
$$t_{i+1}=-\frac{1}{R}\ln|1-e^{-Rt_i}| \tag{3.4.1}$$

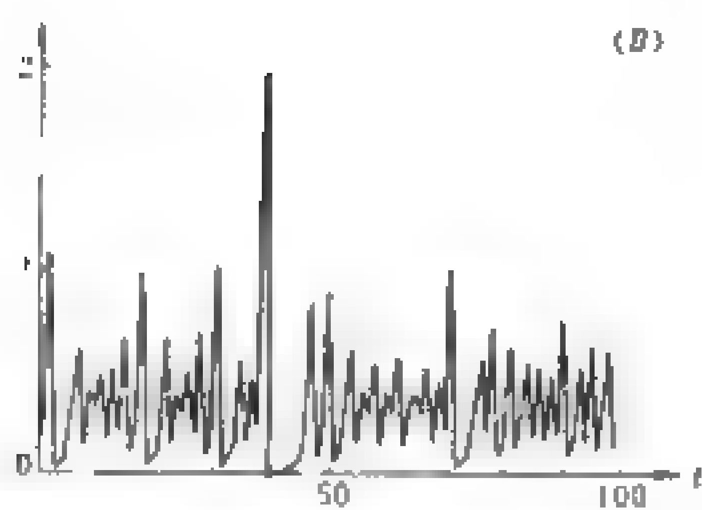
可以证明它具有稳定的概率密度：

$$p(t)=Re^{(-Rt)} \tag{3.4.2}$$

与 Poisson 过程的概率密度相似，而 Poisson 过程是个随机过程。图3-5所示的是方程(3.4.1)产生的时间序列。图3-5C 所示为用数值方法确定的这一时间序列的指数型概率密度。因此，观察到某一过程具有指数型概率密度并不足以确定它就是 Poisson 过程。如果该过程是由如同方程(3.4.1)那样的一维有限差分方程产生的，还有可能绘出某一值与前一个值的函数关系的图形来显示其内在的函数结构。

总之，已知某个动力学过程，无论它是确定性的混沌还是如 Poisson 过程那样的随机过程，往往可以计算其对应的概率密度。





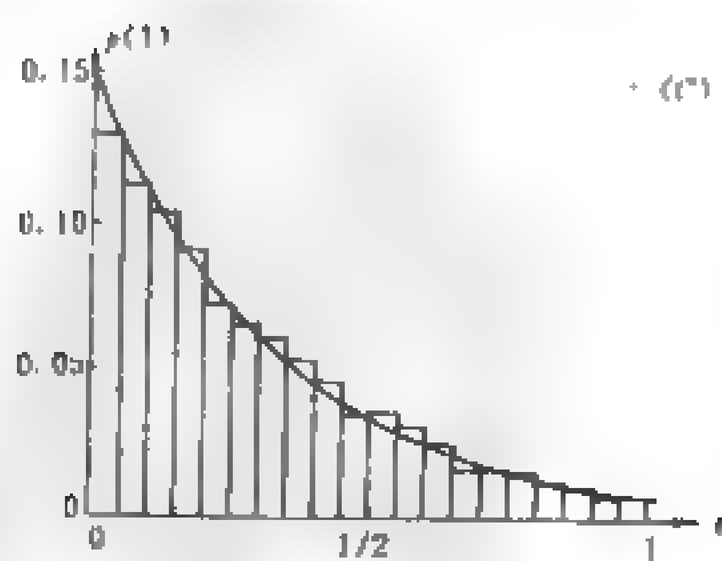


图3-5 一个指数型概率密度的混沌过程

但是，由给定的概率密度来确定动力学过程的逆运算却没有唯一的答案。因此，如果没有细致估计动态的其他统计特性，就不能用事件的概率密度来确证其内在的动力学过程。为人们熟知且应用最多的一种表征复杂时间序列特性的统计量是功率谱。它把复杂的时间序列分解成不同频率的正弦振荡的叠加。给定频率处的功率谱值与该频率的正弦波系数的平方成正比。下面给出功率谱分析的基本方法。

在实际测量中得到的往往是按等时间间隔 τ 的时间序列 $x_1, x_2, \cdots, x_N$。对这个序列人为地加上周期边界条件 $x_{N+j}=x_j, \forall\ j$，然后计算自关联函数，即离散卷积

$$c_j=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i x_{i+j} \tag{3.4.3}$$

再对 c_j 作离散 Fourier 变换，计算其 Fourier 系数：

$$p_k=\sum_{j=1}^{N}c_j e^{[(2\pi k)j\sqrt{-1}/N]} \tag{3.4.4}$$

p_k 代表第 k 个频率分量对 x_i 的贡献，这就是功率谱的本来意义。利用快速 Fourier 变换，更有效的计算功率谱的方法是不经过自关联函数，而直接求 x_i 的 Fourier 系数

$$a_k=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i\cos\left(\frac{\pi ik}{N}\right) \tag{3.4.5}$$

$$b_k=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i\sin\left(\frac{\pi ik}{N}\right) \tag{3.4.6}$$

然后计算：

$$\tilde{p}_k=a_k^2+b_k^2 \tag{3.4.7}$$

通常为许多组 x_i 计算一批 p_k，平均后即逼近前面定义的功率谱。

在倍周期分叉过程中，每分叉一次功率谱中就出现一批对应新分频及其倍频的峰。例如1P 的功率谱中只有基频及其倍频1，2，3，4，…，由1P 分叉到2P 分叉后出现1/2，3/2，5/2，…，2P 到4P 后出现1/4，3/4，5/4，7/4，…，等等。图3-6是一幅32P 的功率谱。新出现的分频峰达到一定高度后就不再增长。这时 $2nP$ 的平均峰高 Φ

(n)与 $2n+1P$ 的平均峰高 $\Phi(n+1)$之比是一个常数。混沌带功率谱的特点是依次出现各阶宽峰。时间序列 x_t 自然地包含了两个时间常数，即采样间隔 τ 和总采样时间 $N\tau$。这两个时间常数的倒数，分别决定两个特征频率

$$f_{max}=1/2\tau \tag{3.4.8}$$

和

$$f_{min}=\Delta f=1/N\tau \tag{3.4.9}$$

f_{max}是以此种采样数据所能观测的最高频率，不然就会出现波形重叠现象，使抽样后的 Fourier 变换产生畸变而失真。为了反映高频成分，应该缩短采样间隔。f_{min}是两个相邻 Fourier 系数的频率差。

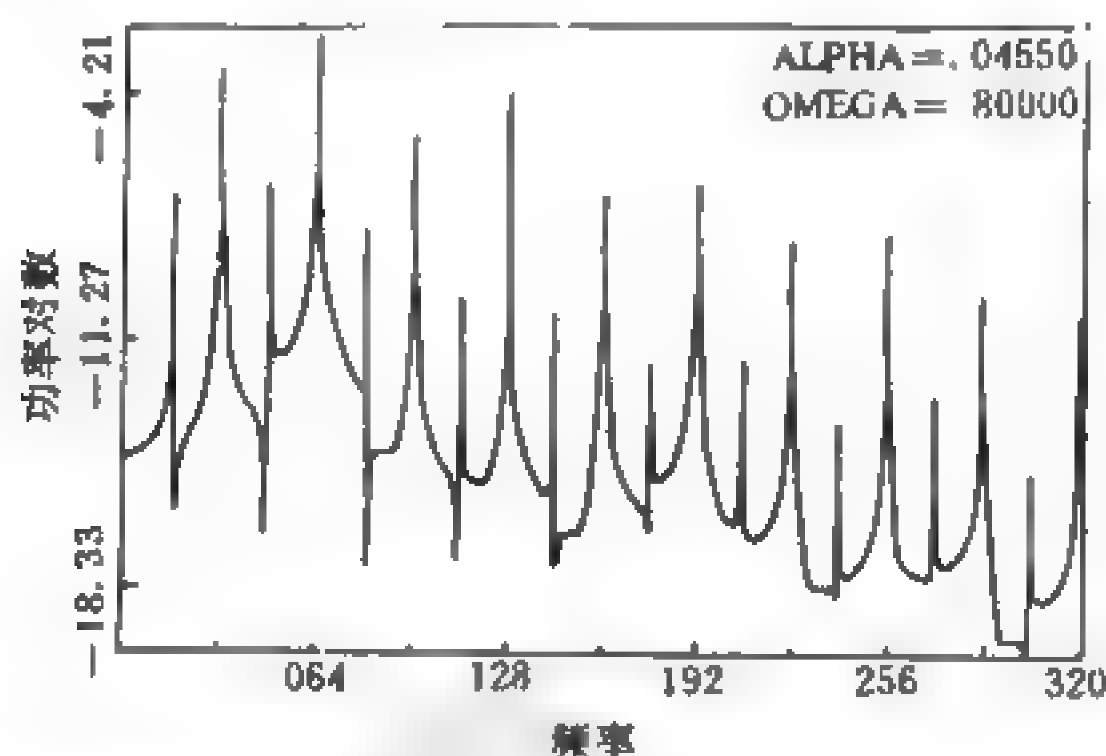


图 3-6　功率谱

使用离散 Fourier 变换时必须经过采样和截断的过程，而这些都会引起误差。设想从有限长的一段正弦函数采了 100 个点。总有无穷多种办法来构造频率更高的周期函数，使之准确通过这 100 个点。这就是说，离散采样时总会出现虚假的高频成分。由于周期性边界条件，这些虚假的高频峰会反射回$(0,f_{max})$频率区间内，造成所谓混淆现象。混淆现象原则上不能消除，只能设法减弱。办法是令 f_{max}显著地超过系统的实际主频率 f_0，例如取

$$f_{max}=kf_0 \tag{3.4.10}$$

其中 $k=4\sim8$，然后在所得的频率谱中只取 f_0 以下部分。这样作，来自混淆现象的假峰可以有效地降低甚至小到背景之下。

另一方面，分频的出现对于识别通向混沌的道路有重要意义。因而设计功率谱的计算方案时，就必须要求能分辨出一定的分频，例如 $p=32$ 的分频。所谓分辨出就是要求相应的峰由若干个点(例如 s 个点)构成，在功率谱中形成有把握确认的结构。因此我们有

$$s\Delta f=f_0/p \tag{3.4.11}$$

从上面四个简单算术关系中消去 τ 和 f_0，得到

$$N=2ksp \tag{3.4.12}$$

如果取 $k=4, s=8, p=32, N=2048$。这就是说，要有效地避免混淆现象和分辨 32 分频，至少应采 2048 个点来作一次 Fourier 变换。通常 N 由计算机的能力决定。

这样，进行功率谱分析之前应当作到[9]：

(1) 确定系统的基频 f_0 和计算能力允许的 N；

(2) 给定 k，确定采样间隔 $\tau=1/(2kf_0)$。对于实验工作，这就确定了应当选用的模数转换器(ADC)的频率；对于理论计算，这决定了每迭代几次或积分几步采一个点，而决不是把所有的迭代点都送去作 Fourier 变换；

(3) 在 s 和 p 中寻求妥协。通常在研究过程中尽量减少 s，达到较高的频率分辨。但为了绘制频谱时，又增加 s 而牺牲 p；

(4) 如果原始数据来自包含大量噪声与外界干扰的测量，还应当考虑适当的滤波或光滑化。

第五节　分形与分维

如果说混沌是在时间尺度内反映了世界的复杂性态，那么与它密切相关的分形则重在空间尺度上反映了世界的复杂性态。在前面的许多例子中我们已经看到了它们之间的关系。为了从另一侧面理解混沌，这里对分形作一个简单的介绍。

分形，英文为 Fractal 是 B. Mandlbrot 用拉丁词根拼造的单

词，意为细片、破碎、分数等等。不规则的几何形态随处可见，云彩的边界，地表的形状，流体的湍流等比比皆是。大自然在展示其美丽多变形态的同时，也提出了难以回答的询问：怎样描述复杂的自然表象？如何分析其内在机理？艺术家常把形状分为两类，一类是自然形态，另一类是几何形态。传统的几何语言只能处理规则、光滑的形态。科学家们一直探索着从欧氏几何体系中解放出来的道路。经过近一二十年的努力，一个新的几何学，即关于自然形态的几何学，或者说分形几何学已初具雏形。它把自然形态看作是具有无限嵌套层次的精细结构，并且在不同尺度下保持某种相似的属性，即自相似性与无标度性。分形成为描述不规则几何形态的有力工具。

但是，到底什么是分形呢？最初，Mandelbrot 把那些 Hausdoff 维数不是整数的集合称为分形。这样，某些看来应是分形成员的，例如著名的 Peano 曲线（维数为 2），就要被排除在外。1982 年 Mandelbrot 修改了原来的定义，认为分形是那些局部和整体按某种方式相似的集合。它被大部分人所接受。K. Falconer[10]曾这样说过，对分形的定义可以用和生物中生命定义的同样方法处理。生物中生命并没有严格和明确的定义，但却可以列出一系列生命物体所具有的特性。比如，繁殖力，运动能力及对周围环境的相对独立的存在能力等等。大部分生物都有上述的特性，但有一些生物对上述某些性质却有例外。因而，对分形似乎最好把它看成具有一些例外性质的集合，而不去寻找精确的定义。按照这种观点，称集合 F 是分形，是认为它具有下列典型的性质：

（1）F 具有精细的结构，即在任意小的尺度之下，它总有复杂的细节；

（2）F 是不规则的，它的整体与局部都不能用传统的几何语言来描述；

（3）F 通常有某种自相似形式，这种自相似可以是近似的或是统计意义下的；

（4）一般地，F 的某种方式定义下的分形维数大于它的拓扑

维数；

(5) 在大多数令人感兴趣的情形下，F 以非常简单的方法确定，可能由迭代过程产生。

当然，应该看到，分形是自然形态的几何抽象。自然界找不到数学上所说的直线和圆周，行星运行轨道也不是严格的椭圆。自然界也不存在绝对意义上的分形。而且只可能是在一定的层次内可以合理地按分形模式来考虑。下面先简要地考察几个简单的分形例子，指出它们的一些特征。然后介绍定量刻划分形的分形维数。

一、分形举例

例 1：Cantor 三分集

设 E_0 是闭区间[0,1]，E_1 表示由 E_0 除去中间 1/3 之后得到的集，即 E_1 包含[0,1/3]和[2/3,1]两个区间。分别去掉这两个区间的中间 1/3 而得到 E_2，即

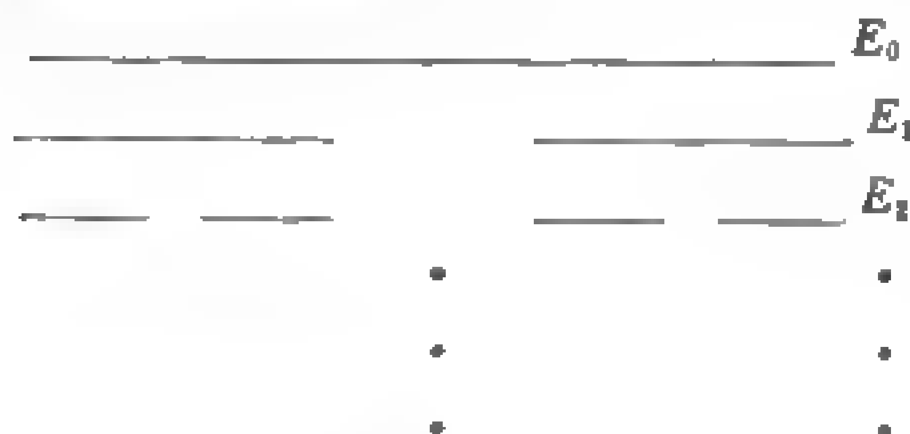


图 3-7　Cantor 集

E_2 包含[0,1/9]，[2/9,1/3]，[2/3,7/9]，[8/9,1]四个区间。按此方法继续下去，则 E_k 上由 $2k$ 个长度各为 3^{-k} 的区间组成（参见图 3-7）。Cantor 三分集 F 是由属于所有 E_k 的数组成的，确切地说，$F=E_k$，F 可以看成是集序列 E_k，当 k 趋于无穷时的极限。显然，不可能画出带有无穷小细节的 F 自身，所以 F 的图案实际上只是一个 k 充分大时对 F 较好逼近 E_k 的图。我们列出 Cantor 三分集的一些性质：

(1) F 是自相似的，在区间[0,1/3]和[2/3,1]内的 F 的部分与 F 是几何相似的，相似比为 1/3。E_2 的四个区间内 F 的部分也与 F 相似，相似比为 1/9，…。Cantor 集包含有许多不同比例的与

自身相似的样本；

(2) F 有精细结构，它包含有任意小比例的细节；

(3) 虽然 F 有错综复杂的细节结构，但 F 的实际定义是非常简单明了的；

(4) F 是由一个迭代过程得到的，通过反复地去掉区间中间 1/3 得到的 E_k 是 F 的越来越好的逼近；

(5) F 的几何性质难以用传统的术语来描述。它既不是满足某些简单条件的点的轨迹，也不是任何简单方程的解集；

(6) F 的局部几何性质也是很难描述的，在它的每点附近都有大量被各种不同间隔分开的其他点；

(7) 虽然 F 在某种意义上是相当大的集(不可数无穷集)，然而它的大小不适于用通常的测度和长度来度量，用任何合理定义的长度量度，F 总是长度为零。

例 2：Koch 曲线

设 E_0 是单位长度的直线段，E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 的线段，而代之以底边在被除去的线段上的等边三角形的另两条边所得到的集，它包含四个线段。把同样的过程应用到 E_1 的每个直线段而构造出 E_2，以此类推，于是 E_k 是把 E_{k-1} 的每个直线段中间 1/3 用等边三角形的另外两边取代而得到的。当 $k\to\infty$，折线序列趋于极限曲线 F，称 F 为 Von Koch 曲线(参见图 3-8)。

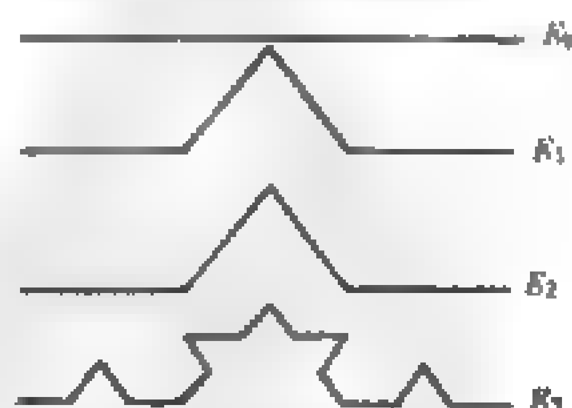


图 3-8 Koch 曲线

Koch 曲线在许多方面的性质与 Cantor 三分集列出的性质类似，它由四个与总体相似的 1/4 部分组成，但比例系数是 1/3。虽然称 F 为曲线是合理的，但它是如此不规则，以致于在传统的意

义下它没有任何切线。简单的计算表明 E_k 的长度为 $(4/3)^k$，令 k 趋于无穷，意味着 F 的长度是无穷大的。而另一方面 F 在平面内的面积为零，所以它的长度和面积对 F 的形状大小都没有提供很有效的描述。

许多其它的集也可以由类似的迭代过程来构造，例如 Sierpinski 垫是从一个初始的等边三角形反复去掉相反方向的小等边三角形得到的，参见图 3-9。还有许多其它的构造方式也可以得到具有此类性质的分形集。错综复杂的 Julia 集，如图 3-10 所示，它是单变量二次复变函数 $f(z)=z^2+c$ 的图案，其中 c 是适当的常数。虽然这种集没有如 Cantor 集和 Koch 曲线所具有的那种严格的自相似性，但它具有拟自相似性即这个集的任意小的部分可以放大，然后平滑的变形使之与这个集的某一较大的部分相一致。

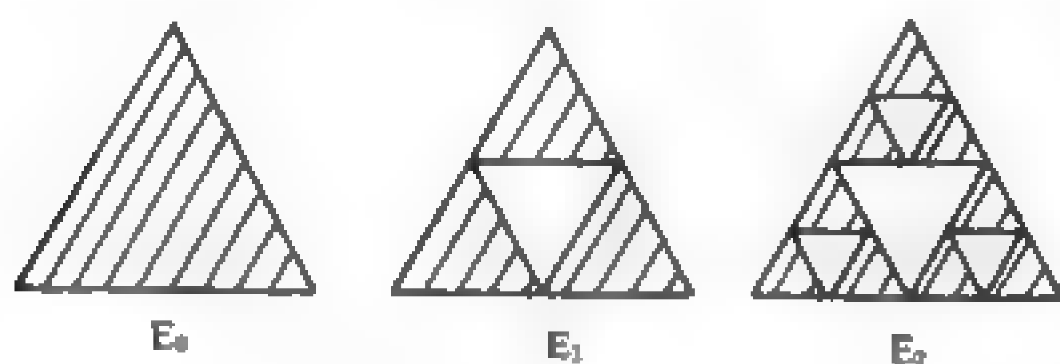


图 3-9　Sierpinski 垫

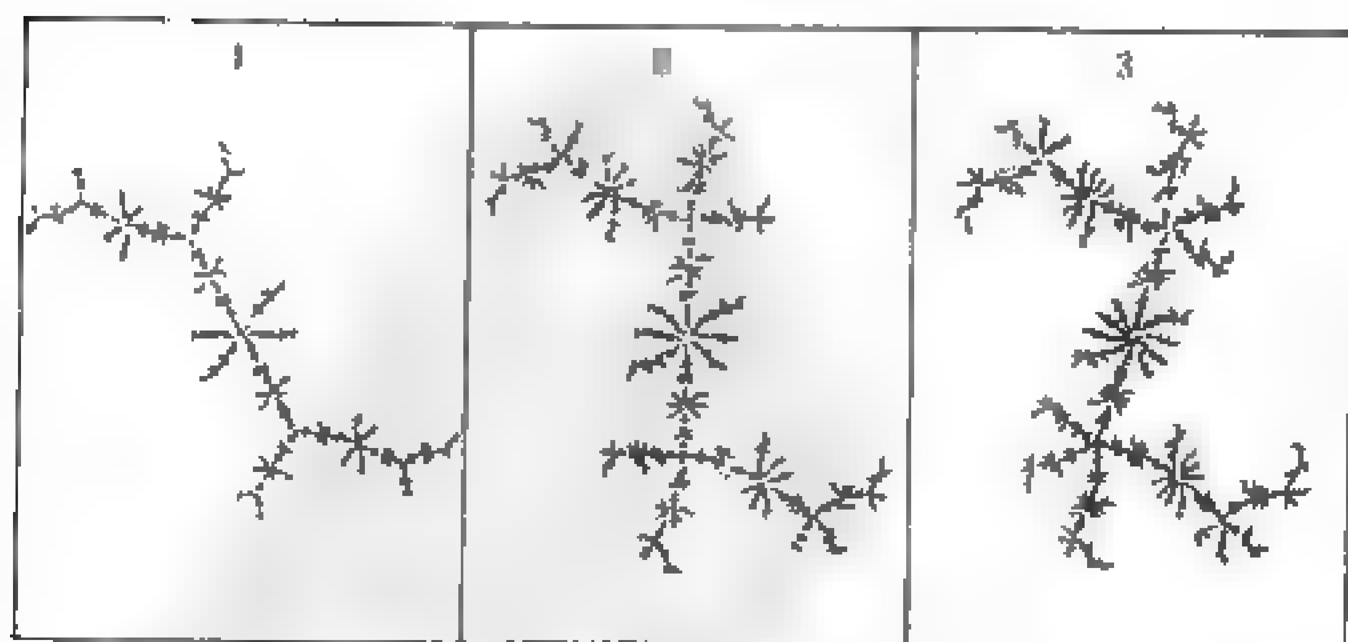


图 3-10　Julia 集

从 Cantor 三分集还可以考虑其它许多种推广。改动三等分这

-作法，可得到双比例 Cantor 集。分形的自相似嵌套结构还可推广到随机成分的嵌套结构，只不过此时的分形是统计意义的自相似，例如图 3-11 所示的随机 Koch 曲线。该分形结构是这样构成的：给定一个初始单位线段，然后用结构的生成成分之一（图 3-11 中(B)或(C)）去替换，相应的概率分别为 p 和 $1-p$。下一步再对新的基本线段(原单位线段的 1/3)实施同样替换办法，如此一直进行下去。

所有这些例中的集所构成的结构，已不能利用经典的几何方法和计算方法来研究。分形几何学的主要工具是它的许多形式的分形维数。

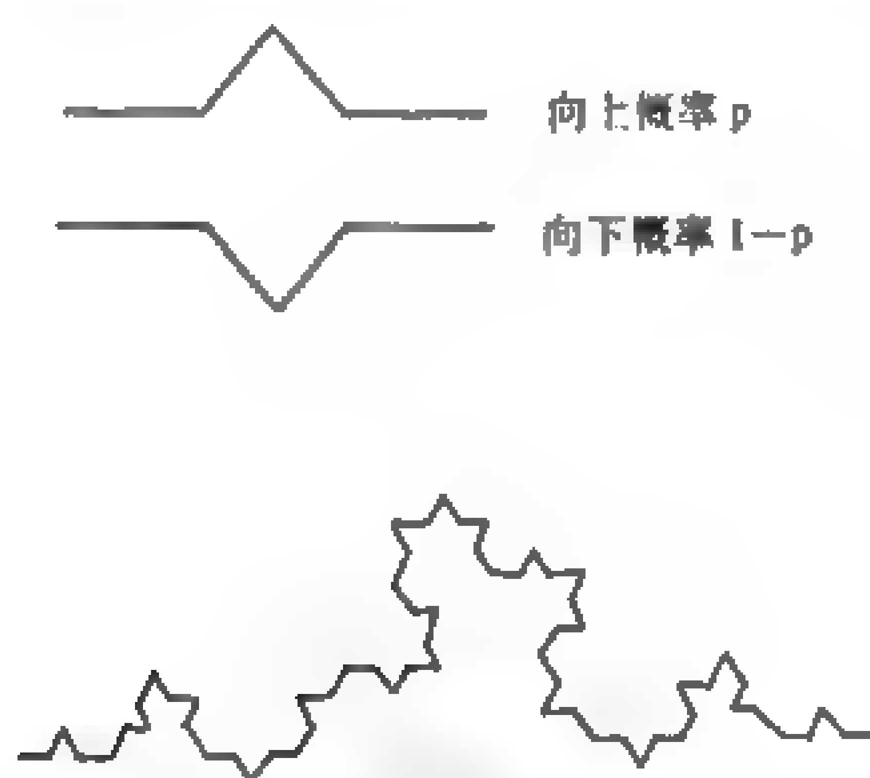


图 3-11 随机 Koch 曲线

二、分形维数

1. 相似维数

图 3-12 表示的一条直线段由与它相似的三个比例系数为1/3的相似形组成，这线段具有维数$-\ln 3/\ln \frac{1}{3}=$；而一个正方形由 9 个比例系数为 1/3 的与之相似的正方形组成，具有维数为$-\ln 9/\ln \frac{1}{3}=2$；同样 Koch 曲线由四个比例系数为 1/3 的与它相似的相似形组成，具有维数$-\log 4/\log 1/3=-\log 4/\log 3$；而 Cantor 三分

集可以看成四个相似比为1/9的与它相似的部分组成，具有维数 $-\ln4/\ln\frac{1}{9}=\ln2/\ln3$。这些集的局部图形与整体是相似的，常称为自相似集。可以定义相似维数为

$$d_S(F)=-\ln m/\ln\left(\frac{1}{c}\right) \tag{3.5.1}$$

式中 m 是组成 F 的相似子集的个数，c 为相似比例系数。相似系数对具有严格自相似性质的结构是十分好用的。若生成无固定不变，计算相似维数很容易。如果生成分形的各个阶段(不同的级)生成元，则相似维数便失去了意义。

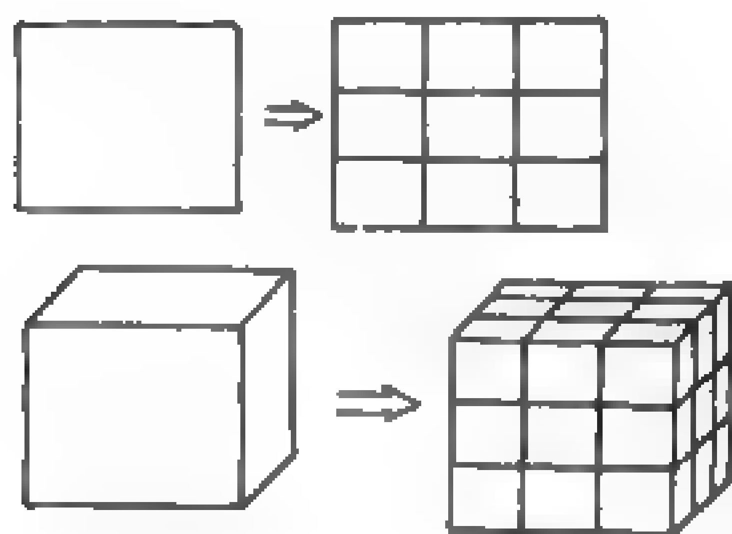


图3-12 相似维数

2. 容量维数

设 F 是平面上的一个有界点集，根据 F 的有界性，总可以找到一个矩形，使 F 包含在这个矩形之中。将这个矩形分割成若干个边长为 ε 的小方格，于是必有某些数目为 $N(\varepsilon)$ 的小方格落在 F 内。于是定义 F 的容量维数为

$$d_c(F)=\lim_{\varepsilon\to0}\ln N(\varepsilon)/\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{3.5.2}$$

实际上集 F 并不限于平面点集。如果 F 是一条直线上的点

集，则定义中所说的小方格应理解为长度为 ϵ 的小区间。如果 F 是 R^n 中的一个有界点集，则小方格应理解为 R^n 中边长为 ϵ 的立方体。上述定义提供了计算机上近似计算点集 F 容量维数的方法，以平面点集为例，计算的准备工作是任意选定一个矩形，使之完全覆盖集 F。然后，任意给定的一个正数 ϵ，以 ϵ 为边长将覆盖 F 的矩形分割成若干个小方格。通过对矩形内所有象素的扫描，记录含有 F 中点的小方格数目，记为 $N(\epsilon)$，那么比值 $\ln N(\epsilon)/\ln(1/\epsilon)$ 可以看成是 $d_c(F)$ 的近似值。当加细矩形的分割，例以 $\epsilon/2$ 代替 ϵ 时，重复计算过程，算出新的比值。如两次比值接近，则可以认为得到了 $d_c(F)$ 的较准确的近似值。

3. 信息维数

在上述容量维数的定义中，为了求 $d_c(F)$，需知道包含 F 中点的方格数，但这样的方格包含多少个 F 中的点并未加以考虑。这就是说，$d_c(F)$ 只表示了 F 的几何尺度的信息，而没有反映 F 在平面上分布疏密的信息。为了能反映点集在分布上的信息，定义信息维数：

$$d_I(F)=\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon)/\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \tag{3.5.3}$$

其中

$$I(\epsilon)=\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \ln(1/p_i) \tag{3.5.4}$$

式中 p_i 是 F 中的点落在第 i 个方格中的概率。假若所有方格以相等的概率包含 F 中的点，$p_i=1/N(\epsilon)$，于是 $I(\epsilon)=\ln N(\epsilon)$。这样，信息维数与容量维数便是一致的。计算概率 p_i 的简单方法是用落在第 i 个方格中的点的频率代替概率，因此为了求得 p_i 的较好的近似值，计算的点数将是很大的。

4. 关联维数

分形的自相似结构往往表现在统计意义上，而非线性系统的相空间可能维数颇高，甚至无穷，有时还不清楚维数是多少，而吸引子的维数一般都低于相空间维数。对于时间序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 我们构造一批 m 维矢量，支起一个嵌入空间。只要嵌入维 m 足够

离($m>2D+1$,D 是吸引子维数),就可以在只相差拓扑变换的意义下恢复原来的动力系统。构造 m 维矢量的办法常采用时间差法,即按间隔 p 从时间序列($x_1,x_2,\cdots,x_n$)中取数,作为分量:

$$y_i=(x_i,x_{i+p},x_{i+2p},\cdots,x_{i+(m-1)p}),(i=1,2,\cdots) \qquad (3.5.5)$$

构造好矢量 y_i 之后,要定义它们之间的距离:

$$|y_i-y_j|=\max_{1\leq k\leq m}|y_{ik}-y_{jk}| \qquad (3.5.6)$$

凡是距离小于给定数 ε 的矢量,称为有关联的矢量。若一共构造了 M 个矢量 y_i,M 与 N 为同量级的大数,数一下有多少对关联矢量。它在一切可能的 M^2 种配对中所占比例称为关联积分:

$$C(\varepsilon)=\frac{1}{M}C(\varepsilon)=\frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{M}\theta(\varepsilon-|y_i-y_j|) \qquad (3.5.7)$$

其中

$$\theta(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x\leqslant 0\end{cases} \qquad (3.5.8)$$

如果 ε 取得太大,任何一对矢量都发生关联,$C(\varepsilon)=1$,取对数后为 0;如果 ε 取得合适,原始数据客观地反映出相应的标度性质,就可以定义关联维数:

$$D=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln C(\varepsilon)/\ln\varepsilon \qquad (3.5.9)$$

如果 ε 取得太小,低于环境噪声和测量误差造成的矢量差别,则上式算得的就不是关联维数,而是嵌入维数 m。实践中往往改变一批 m 值,看能否得到不变的 D,即双对数关系 $\log C(\varepsilon)\sim\log\varepsilon$ 中的直线段。这样既可检验标度性质,又可有效地区分噪声和动力学讯号。

5. Hausdorff 维数[31]

Hausdorff 维数对任何点集都有意义,它建立在测度概念的基础上,是研究分形维数的最基本工具。

设 U 是 n 维欧氏空间 R^n 中任意非空子集,它的直径是指 U 内任意两点 x,y 的距离 $|x-y|$ 的上确界 $|U|$,即

$$|U|=\mathrm{Sup}\{|x-y|,|x,y\in U\} \qquad (3.5.10)$$

如果 U_i 是有限多或可数无穷多个点集构成的点集序列,说

U_i 是点集 F 的一个 δ 覆盖，那是说有

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \tag{3.5.11}$$

且对每一个 i 都有 $0 < |U_i| \leqslant \delta$。

设 F 为 R^n 中的任意子集，S 为非负实数，对任意给定的 $\delta > 0$，设

$$H_\delta^s(F) = \inf\{\sum |U_i|^s \mid \{U_i\} \text{为} F \text{的} \delta \text{覆盖}\} \tag{3.5.12}$$

考虑 F 的所有直径不超过 δ 的覆盖，并使上式右端出现的和式达到最小，当 δ 减少，$H_\delta^s(F)$ 随之增加，当 $\delta \to 0$ 时，极限值为

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(F) \tag{3.5.13}$$

称为集 F 的 s 维 Hausdorff 测度。Hausdorff 测度是对长度、面积、体积概念的推广。长度、面积、体积具有比例性质：当比例放大 λ 倍时，线的长度放大 λ 倍，平面面积放大 λ^2 倍，空间物体的体积放大 λ^3 倍，而对于 s 维 Hausdorff 测度的放大倍数为 λ^s。

从上面的定义可以看出，对任何给定的点集 F 和 $\delta < 1$，$H_\delta^s(F)$ 对 s 是不增加的，而且，如果 $t > s$，且 $\{U_i\}$ 为 F 的 δ 覆盖，则有

$$\sum_i |U_i|^t \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \tag{3.5.14}$$

取下确界之后得

$$H_\delta^t(F) \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \tag{3.5.15}$$

令 $\delta \to 0$，由于 $t > s$，若 $H^s(F) < \infty$，则有 $H^t(F) = 0$，即存在 s 的一个临界值，使 $H^s(F)$ 在这个值处从无穷大跃变至 0，这个临界值就称为集 F 的 Hausdorff 维数，记为 $d^H(F)$。即

$$\begin{aligned} d_H(F) &= \inf\{s \mid H^s(f) = 0\} \\ &= \sup\{s \mid H^s(F) = \infty\} \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

如果有 $s = d_H(F)$ 成立，那么，$H^s(F)$ 可以为零，无穷或满足 $0 < H^s(F) < \infty$。

Hausdorff 测度有如下性质：

(1) 若 $F \subset R^n$，$\lambda > 0$，则有比例性质：

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F) \tag{3.5.17}$$

其中 $\lambda F = \{\lambda x \mid x \in F\}$。

(2) 若 $F\subset R^n$，$f:F\to R^m$ 为一映射，使得对正值常数 c 和 α，有指数为 α 的 Holder 条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha},\qquad x,y\in F \tag{3.5.18}$$

则对任意 s 有

$$H^{s/\alpha}(f(F))\leqslant C^{s/\alpha}H^s(F) \tag{3.5.19}$$

所以，如果 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$，则 $H^s(f(F))=H^s(F)$，即 Hausdorff 测度对平移和旋转都不变。

从 Hausdorff 测度的性质可以得到其维数的许多性质：

(1) 如果 $F\subset R^n$ 为开集，则 $d_H(F)=n$。

(2) 如果 F 为 R^n 中的 m 维光滑曲面，则 $d_H(F)=m$。

(3) 如果 $E\subset F$，则 $d_H(E)<d_H(F)$。

(4) 如果 $\{E_i\}$ 为可数的序列，则

$$d_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i)=\sup_{1\leqslant i<\infty}\{d_H(F_i)\} \tag{3.5.20}$$

(5) 如果 F 是可数的，则 $d_H(F)=0$。

(6) 如果 $F\subset R^n$，$f:F\to R^m$ 满足 Holder 条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{\alpha},\qquad x,y\in F \tag{3.5.21}$$

则有

$$d_H(f(F))\leqslant(1/\alpha)d_H(F) \tag{3.5.22}$$

(7) 如果 $f:F\to R^m$ 满足：

$$c_1|x-y|\leqslant f(x)-f(y)|\leqslant c_2|x-y|,\qquad x,y\in F \tag{3.5.23}$$

其中 $0<c_1\leqslant c_2<\infty$，则 $d_H(f(F))=d_H(F)$。

例：计算 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数。

Cantor 三分集 F 可以分为左半部分和右半部分，分别记为

$$F_L=F\cap[0,1/3],\quad F_R=F\cap[2/3,1] \tag{3.5.24}$$

它们与 F 几何相似，相似比为 1/3。而且 $F_L\cap F_R=0$，$F=F_L\cup F_R$。

由 Hausdorff 性质(1)，对任何 s 得到

$$H^s(F)=H^s(F_L)+H^s(F_R)=(1/3)^sH^s(F)+(1/3)^sH^s(F) \tag{3.5.25}$$

如对 s 有 $0<H^s(F)<\infty$，则得到 $1=2\times(1/3)^s$。由此 $s=\ln2/\ln3$，这个临界值便是 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数。等同于容量维数。

参考文献

[1] 陈忠，智慧与人生，沈阳：辽宁教育出版社，1989，1 页

[2] 李后强、汪富泉，分形理论及其在分子科学中的应用，北京：科学出版社，1993，56 页

[3] 郝柏林，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海：上海科技出版社，1993，122 页

[4] 刘式达、刘式适，非线性动力学和复杂现象，北京：气象出版社，1989。168 页

[5] 吴祥兴、陆剑虹，离散区间上 logistic 方程的动力行为，上海师范大学学报，1995，24(4)：31

[6] 郝柏林，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海：上海科技出版社，1993，139 页

[7] 李后强、汪富泉，分形理论及其在分子科学中的应用，北京：科学出版社，1993，80 页

[8] Leon Glass & Michal C. Mackey，Princeton University Press，1988，From Clock to Choas，P41

[9] 郝柏林，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海：上海科技出版社，1993，119 页

[10] K. Falconer，John Wiley and Sons Press，1989，Fractal Geometry

[11] 齐东旭，分形及其计算机生成，北京：科学出版社，1994，190 页

第四章　保守系统中的混沌

在前面的几章中，我们介绍了混沌现象，并对混沌的定性定量特征作了一般的讨论。如果说这是一种纵向研究的话，那么从本章开始，我们将把对混沌的研究作横向的展开，即对几类特殊的，但具有典型意义的系统中的混沌进行较为详细的探讨。包括保守系统中的混沌、耗散系统中的混沌和无穷维动力系统中的时空混沌。对它们的研究不仅在混沌学的发展历史上有着重大意义，总结出了构成现代混沌学基本框架的重要成果，而且由此提供了一系列研究混沌的基本方法，也引出了当今研究的许多“热点问题”。在以后的几章中我们将力图通过实例来提出问题，然后进行适当的理论分析，希望从中得出一般性的结论。同时，为了使初学者有一个入门的阶梯，我们将对研究中经常用到的一些基本的概念和方法作适当的介绍。

不同类型系统中的混沌有着不同的形态和特点。从物理学的观点看，我们可以把系统分为保守系统和耗散系统。这两类系统中的混沌行为有其相似之处，但也有很大的区别。从刻划系统的相空间或状态空间来看，又可以把系统分为低维的、有限维的系统和高维的、无限维的系统。遵循由简单到复杂的程序，我们先分别对时间和空间范围内的混沌加以讨论，然后对时空混沌进行研究。

在现实世界中，我们遇到的系统往往呈现出耗散的特征。简单地说这类系统的能量是随时间的推移而不断地释放的，其相空间是收缩的。这些耗散系统的特征将在下一章中详细论述。从直觉上，我们也可以感知到，由于现实世界中的系统所依存的环境是多层次和多样性的，因而在大量自由度相互作用下就呈现出了耗散的特征。那么，这一现实是否意味着可以避开保守系统而直接去研

究耗散系统呢？这显然是不明智的，其一，有大量的物理实验模型体现出了保守系统的随机性，对这类系统的研究积累了许多处理随机行为的有效方法，为研究耗散系统的随机行为奠定了基础。特别是那些具有丰富行为的不可积系统的研究仍限于数学研究的领域，许多有益的物理结论仍然包含在现代数学的抽象形式里，需要进一步转化为直观的物理概念。其二，对于近可积系统的研究，在理论上打破了统计物理中某些确定论思想，也就是说某些问题不能简单地对实验结果进行修正后就能达到或接近真实的结果。其三，保守系统与耗散系统的根本区别在于是否满足 Liouville 定理，要真正理解耗散系统必须从保守系统的研究着手，只有深刻地研究了服从 Liouville 定理的保守系统才可能真正把握不满足 Liouville 定理的耗散系统是如何在相空间中运行的。

鉴于上述理由，我们先来考虑保守系统，自然就得从 Liouville 定理出发作一探讨。Liouville 定理是经典统计物理中 Gibbs 系统理论研究保守系统的一个很重要的定理。要想准确地刻划保守力学体系在相空间中代表点的运动特点，必须由此定理出发，该定理有几种相互等价的表述形式，如保守力学系统中"系统在相空间中代表点的密度在运动中不变"，"相体积不变"，"相体积元 $dpdq$ 中的全部相点都在 t' 时刻移到了体积元 $dp'dq'$ 中去"等等。

这里"代表点"指的是同一力学系统在不同初始条件下的不同运动状态，也可以是"系统"在某一时刻的代表点（就像系统在某一时刻的一个"全身照片"）。

所谓代表点的密度在运动中保持不变，就是指保守系统在相空间中的代表点在运动中不会发生聚集和分散，原来均匀的运动会始终保持均匀。

Liouville 定理的一般数学表述如下：

令 ρ 表示代表点在相空间中的密度，$d\rho/dt$ 表示随代表点一起运动时，ρ 随时间的变化率，$\partial\rho/\partial t$ 表示在相空间中某个固定点 P 上，代表点密度 ρ 随时间的变化率，因此，Liouville 定理从数学上看，就是：

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \tag{4.0.1}$$

Liouville 定理严格的数学表述为：

$$G_0 \mathrm{d} p_0 \mathrm{d} q_0 = G \mathrm{d} p \mathrm{d} q \tag{4.0.2}$$

等式左边表示在初始时刻 t_0 相点(p_0,q_0)处于初始相空间 G_0 的相体积，同样，右边表示 t 时刻相点(p,q)所处的相空间 G 的相体积。

从 Liouville 定理的证明过程中可以看出，只要满足积分变换中 Jacobi 行列式为 1，就能使等式成立。

将积分变数 P,q 变换为 p_0,q_0，则

$$G \mathrm{d} p \mathrm{d} q = G_0 \frac{\partial(pq)}{\partial(p_0 q_0)} \mathrm{d} p_0 \mathrm{d} q_0 \tag{4.0.3}$$

Jacobi 行列式为 $J=\frac{\partial(pq)}{\partial(p_0 q_0)}$，而 $J=1$ 的条件又是 Hamilton 正则方程成立：

$$\frac{\mathrm{d} q_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{4.0.4A}$$

$$\frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial g_k} \tag{4.0.4B}$$

这说明只有在保守系统中 Liouville 定理才能成立，而在耗散系统中 Liouville 定理将失效。

根据 Liouville 定理，保守系统的相空间体积在运动中是保持不变的。而耗散系统的相空间会不断收缩。即相空间的体积元 $(\mathrm{d}V)=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 的变化律应满足：

$$\frac{1}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}<0 \tag{4.0.5}$$

我们也可以把上式作为耗散系统的定义。

现在我们结合 Liouville 定理的物理涵义来分析一下系统运动的不同形态：

(1) Liouville 定理成立，意味着只要经过足够长的时间间隔，系统总可以返回到初始状态或离它任意接近的状态。尽管有时返回的时间(周期)可能很长，以致没有实际的意义，但理论上它总是

会回归的，系统在相空间中的代表点称为"非游荡点"，它们的轨道就并入"非游荡集"，与此相反的叫做"游荡点"，和"游荡集"。显然，非游荡点的运动通常具有周期性或准周期性(准周期表示可以无限接近于周期性的运动)，游荡点的运动是非周期的。本书所研究的混沌运动从原则上讲也是回归的，它属于一类特殊的"非游荡集"。所以，在研究混沌运动时我们对"非游荡集"十分重视。

从几何图象上看，Liouville 定理的成立保证了 Poincaré 返回的可能性。Poincaré 返回是指在一个称为 Poincaré 截面的 $N-1$ 维超平面上，系统运动轨道与它的交点永远会限制在一个足够小的范围内。这就是回归运动(包括不动点、周期运动、准周期运动和混沌运动)的几何图象的特征。实际上，人们对实物和运动的认识也正是建筑在"回归"的基础上的，因为只有回归才有"定常性"，才存在可被认识的规律性，而不回归的"游荡"运动则是不可重复的，因而也是无法认识和把握的。

当然，单纯用系统在相空间中点的轨迹是不能严格判定系统运动的性质的。因为，相轨道只是一种理想的几何图象，它是一维的，就像一根无限细的线一样其测度可以为零。而系统运动某种形态则是实实在在存在着的，它应该像在一个"管子"之中，其测度不可能为零，否则就无法测量。因此，为了尽可能地精确，我们必须在一个尽管可能很小，但绝不能为零的区域中研究问题。

(2) 对于保守系统来说，相体积(相密度)是不变的，而对非保守系统来说相体积可以扩大，也可以缩小。如果相体积扩大，就意味着系统微观态数的增加，即在相同的宏观态下，系统的微观状态可能更加丰富多彩，呈现出复杂混乱的局面。相反，如果相体积缩小，则表明系统在运动变化之后微观态数减少，系统内部出现某种"同步"或"有序"化的趋势。经过一段时间后，某些微观态将永远丧失，或者不再出现，或者出现"多数服从少数"的局面(大多数变量受少数变量的"役使"和控制)。这是系统微观层次上的自由度减少了，归并了。如果沿此方向发展，将导致系统产生一种新的宏观态或整体属性，显然这就是耗散结构理论与协同学中讲的新有序态

的出现。它是一种自组织的过程。

(3) 相空间的收缩是一个复杂的过程，相体积并不一定在各个自由度上都均匀收缩。一般来说，可能出现三种情况(如图 4-1)：

(A) 均匀收缩；

(B) 非均匀收缩，但它们都属于确定性的；

(C) 最终收缩为一种具有复杂折叠形态的曲线。

图 4-1 相空间的收缩

这最后一种情况的存在表明，无论相空间是扩大、不变还是缩小，也即 Liouville 定理是否成立，系统的运动轨道都可能变得十分复杂，从而有可能出现混沌运动。所以我们在这里引入 Liouville 定理的目的，不是要用它来判定混沌运动是否实现，而是用它来区分保守系统与非保守系统(耗散系统)。事实上，在这两类系统中混沌都是存在的，只不过各有其特点而已。

(4) Liouville 定理的失效不仅可以导致系统从相对无序到相对有序性的进化，它对应于相空间的均匀的或正常确定的收缩(图 4-1(A)，(B))，也可能导致系统内随机性的产生，它对应着相空间的非正常扩张和非正常收缩(见图 4-1(C))。所谓非正常收缩和非正常扩大都与相空间的维数有关。例如上述非正常收缩可以表现为有层次结构和非正数维数。这就是下面将要详细讨论的奇怪吸引子。至于收缩为一条无穷折叠的曲线时我们将以一维非线性映象作为典型例子来加以研究。它同时又表现了混沌的另一重要特

征，从周期运动向非周期运动发展。

在混沌研究中常用的 Liouville 定理实际上是其推论，譬如只须假定相体积中代表点的密度正好等于 1，那么代表点的数目就是相体积。根据 Liouville 定理，代表点的密度在运动中不变，也就是代表点总数在运动中始终等于相体积，所以代表点数目的不变等同于相体积在运动中不变。这就是所谓的“相体积不变原理”。利用相空间不变原理就可以将所要研究的保守系统和后面将探讨的耗散系统区分开来。

例如 Lorenz 模型[1]：

$$\begin{cases}\dot{X}=-\mathrm{Pr}X+\mathrm{Pr}\,Y\\ \dot{Y}=-XZ+rX+Y\\ \dot{Z}=XY-bZ\end{cases} \tag{4.0.6}$$

其中，$r=\frac{R_a}{R_{a_c}}$，R_a 为 Rayleigh 数，R_{a_c} 为临界 Rayleigh 数，X 为速度模块，Y 为温度模块，Pr 为 Prandtl 数。

由于单模激光研究中得到的方程与此相同，所以它已被人们广泛研究。它在相体积运动过程中变化如下：

$$\sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}=-(P+1+b)<0 \tag{4.0.7}$$

所以说该系统是耗散的。同样的方法可以验证下节所要讲述的 Hamilton 系统，它的相体积在运动中不变，它的代表点可以认为始终在一等能面上运动。

第一节　Hamilton 系统

一、保守系与 Hamilton 系统

如果我们考虑一个 n 自由度的系统，它由广义坐标 q_i 与广义动量 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 来描述。集合 (q_i,p_i) 定义了 $2n$ 维相空间中的一个点，即代表点。这个点用正则方程可描述如下：

$$q=\frac{\partial H}{\partial p_i}=\{q_i,H\} \tag{4.1.1}$$

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = \{p_i, H\} \tag{4.1.1}$$

其中，H 是系统的 Hamilton 函数，$\{,\}$，即所谓 Poisson 括号，可定义如下

$$\{u(x,y), v(x,y)\} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial v_i} - \frac{\partial v}{\partial g_i}\frac{\partial u}{\partial v_i} \right) \tag{4.1.2}$$

根据正则方程(4.1.1)的描述可以计算得，$H = H(q_i, p_i, t)$，那么，H 随时间的变化情况就可以由 H 对 t 求导，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.1.3}$$

来演示。显然如果 H 中不含 t，就可得到 $\frac{dH}{dt} = 0$，这说明 H 不随时间变化，是一守恒量，所有代表点的运动都在 H 函数所构成的面上运动，这样的 Hamilton 系统就称为保守系统。

如果 H 中含有 t，我们可以作适当变换，引入 $2(n+1)$ 维相空间，使第 $n+1$ 个坐标称为 t，第 $n+1$ 个动量为 $-H$，这样做就可将系统变为不含 t 的 Hamilton 系。令作 $\bar{H}$，这一新系统与原系统是等价的，而且是一个保守系统。所以任何一个 Hamilton 系统都可以转化为保守系统。因而在讨论 Hamilton 系统的动力行为时，通常认为 H 是不依赖于时间 t 的函数。

二、可积与近可积系统

在研究 Hamilton 系统时，经常提及的两大系统是可积系统和近可积系统，可以说他们的动力行为已经包罗了 Hamilton 系统的本质特性。下面我们从解析力学的基本概念出发来讲一下可积和近可积系统。

如果有 N 个自由度的不含 t 的 Hamilton 系统即保守系统，现用正则方程来描述其动力状态，

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ p_i &= \frac{\partial H}{\partial g_i} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

如果能够找到一系列的正则变换，将广义动量 p_i 和广义坐标 q_i 变到另一套坐标 $J_i, \theta_i, (i=1,2,\cdots,n)$，那么只要能使 Hamilton 函数

只依赖于 J_i 而与 θ_i 无关，即 $\overline{H}=\overline{H}(J_1,J_2,\cdots,J_n)$，则相应的 Hamilton 系统的运动方程可变为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}&=\frac{\partial H}{\partial J_i}=\Omega_i(J_1,J_2,\cdots,J_n)\\
\dot{J}_i&=-\frac{\partial H}{\partial \theta_i}=0
\end{aligned}
\tag{4.1.5}
$$

由于 Ω_i 是与 θ_i 无关的函数，这些方程可立即积分出来：

$$
\begin{aligned}
&\theta_i(t)=\Omega_i t+\theta_i(0)\\
&J_i=J_i(0)
\end{aligned}
\tag{4.1.6}
$$

这样该力学系统的运动方程就完全解出来了。由初始条件决定的常数 $\theta_i(0)$ 和 $J_i(0)$ 有 $2N$ 个。反过来再通过最初的广义坐标和广义动量来表示，就是 $2N$ 个运动不变量。其中 J_i,θ_i 称为作用角度量。这样的 Hamilton 系统称为可积的。事实上，只要知道 N 个适当的运动积分，运动方程的解就可以积分所得，也就是一种可积系统。

从上面的表述中我们可以清楚地看到，其中根本的困难是如何找到所需的正则变换或是运动积分。事实上如果从一切可能的解析的 Hamilton 系统中任取一个，它几乎一定是不可积的（只要 $N\geqslant 2$）。可积的 Hamilton 是非常稀少的，以致于用它们来逼近一个不可积系统也是办不到的。

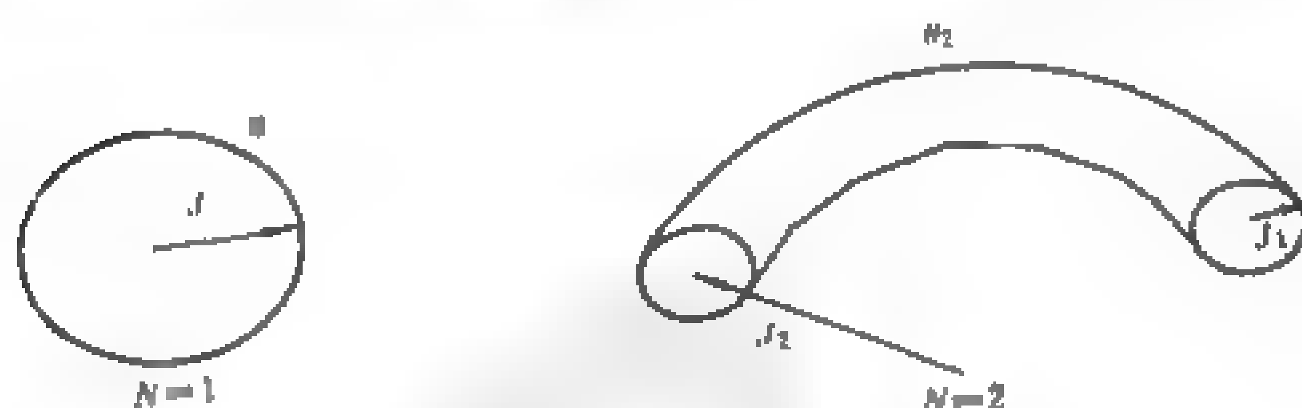


图 4-2 低维环面

可积系统在相空间中的运动与统计力学的要求格格不入。如果系统的运动对于一切广义坐标都是有界的，那么各种力学量只能是角度变量的周期函数。这类系统在相空间的运动限制在 N 维环面上，$J_i(0)$ 是环面的半径，而描述在环面上的挠动。由于高维环面不易形象化，现用低维情况作图，如图 4-2 所示。

下面先举一些可积系统的例子。

例 1：简谐振子 $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2$ 的 Hamilton Jacobi 方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+\frac{1}{2}kq^2=\alpha \tag{4.1.7}$$

由此等式可积分得生成函数，那么，作用变量 $J=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial S(q,\alpha)}{\partial q}\mathrm{d}q$ $=\alpha(m/k)^{\frac{1}{2}}$，因为 $H=\alpha\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}J$，所以 $\tilde{\omega}=\frac{\partial H}{\partial J}=\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$。Hamilton-Jacobi 函数就可以写成分离形式：$H=\tilde{\omega}J$，换言之，它的 Hamilton-Jacobi 方程为两个独立的方程。

例 2：单摆[2] $\mathrm{H}=\frac{1}{2\mathrm{m}}p^2-\mu_0\cos\theta$，相空间 (p,θ) 中的轨迹为 $\frac{1}{2\mathrm{m}}p^2=\mu_0\cos\theta+\mathrm{E}$。当 $\mathrm{E}=\mathrm{U}_0$ 时，相图上呈现出的曲线称为分界线。$\mathrm{E}<\mathrm{U}_0$ 时系统作振动运动，$\mathrm{E}>\mathrm{U}_0$ 时系统作转动运动，如图 4-3 所示。

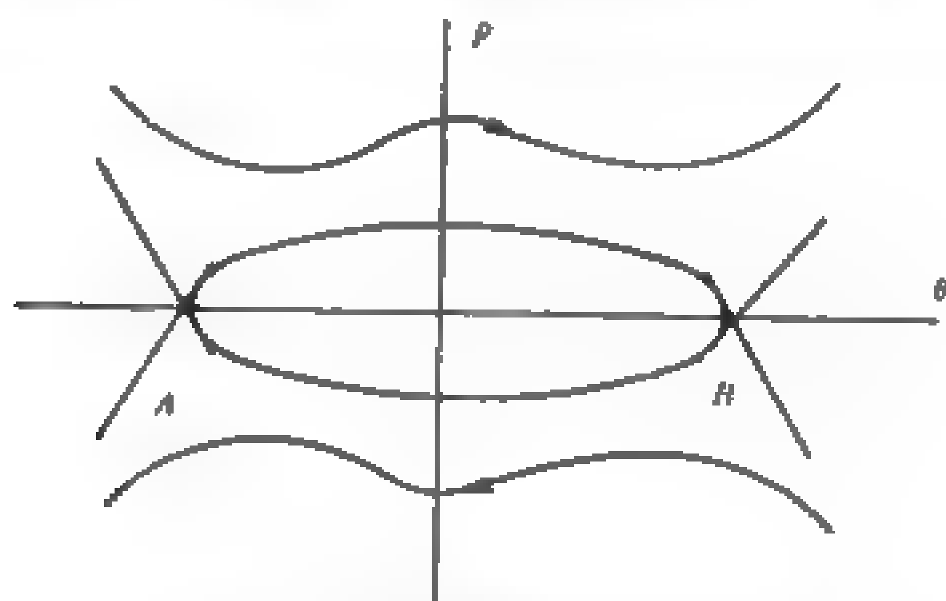


图 4-3 单摆相空间示意图

图中相图与 θ 轴的交点分别 $\mathrm{A}=(p,\theta)=(0,-\pi)$，$\mathrm{B}(0,-\pi)$，$\mathrm{O}=(0,0)$，其中 A，B 称为不稳定不动点，O 为稳定的不动点。所谓不动点就是在这一点处动力系统处于滞留状态，其计算方法可以令 *Hamilton-Jacobi* 方程右边为 0 来求得，即 $\theta=0$，$p=0$。那么稳定不稳定的判定可以通过该点处的 *Lyapunov* 指数来确定。*Lyapunov* 指数小于 0 为稳定点。一般地，与双曲点相连接的轨道受扰动后就会出现混沌行为，这可在 *Melnikov* 方法运用一节中看到详细论述。

事实上，只要 $N\geqslant2$，由 J_i 决定的 N 维环面就仅仅是 2N－1 维等能面的一部分。换句话说，等能面上有大片区域是系统运动所达不到的，而正则系统的基本假定要求系统达到等能面各点的概率相等。所以说可积系统的运动是确定论的。如果要寻求随机性机制或者是通向随机性的桥梁，必须研究不可积系统。比如例 2 中提及的微扰技术就是探讨随机性的手段。这种加微扰于可积系统而形成的系统称为近可积系统。近可积系统至少是二自由度的，它可等价于与时间有关的单自由度 *Hamilton* 系统。近可积与可积的保守系统的根本区别就是前者存在混沌运动。两个自由度可积系统有两个孤立积分，相空间的轨迹被限制在一个二维环面上。如果在横截环面的某一 *Poincaré* 截面上观察运动，将是一条光滑的闭曲线。周期运动的轨迹为这条曲线上的有限个点，而准周期运动的轨迹则充满整个曲线。一般来说，近可积系统是规则轨迹与混沌轨迹共存的系统。对于某些初始条件，轨迹呈现有规则的行为，而对于另一些初始条件却呈现出混沌现象。不可积的二自由度系统只有一个积分，在 *Poincaré* 截面上具有确定初始条件的混沌轨迹，它将随机散布在被规则轨迹划分出来的区域中，并随时间的延续而布满整个区域，具有二维测度。下面先看一些二自由度近可积系统的例子。在更高维的系统中，规则轨道将不能限制混沌轨道的运动，会出现著名的 *Arnold* 扩散现象，这将在 *KAM* 定理一节中叙述。

例 3：质子在交叉储存环中的运动[1]。

在储存环中的带电粒子的运动路径会偏离理想的圆形轨迹。而磁场的设计是让粒子回到圆形轨迹，因此会发生围绕圆形轨迹的振荡。设 x 为对圆形轨迹的偏离，以 φ 为幅角，它正比于时间，则 x 的变化可由简谐振子的方程描述：

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=-Q^2x \qquad (4.1.8)$$

其中 Q 与磁场梯度有关。如果再考虑辐射损失及另一储存环中粒子与它的电磁作用，上式应作如下修改：

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=-Q^2x-RP+F(x)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\delta(\varphi-2n\pi)\right] \tag{4.1.9}$$

其中 $P\equiv\frac{dx}{d\varphi}$，$R$ 为阻尼系数，$F(x)$ 为描述两束粒子间非线性电磁作用力。因为两束粒子只有在很小区间内发生相互作用，所以用 δ 函数来模拟它。如用修正式描写一个周期脉冲驱动下的阻尼振子运动，可对方程在外力周期范围内积分。得到

$$x_{n+1}+Bx_{n-1}=2Cx_n+2F(x_n) \tag{4.1.10}$$

其中 $B\equiv e^{-2\pi R}$，$2C=e^{2\pi q_+}+e^{2\pi q_-}$，$q_\pm$ 为 $q^2+Rq+Q^2=0$ 的两个根。

若对参数作适当假设那么质子在交叉储存环中的运动可用一个两阶差分方程来描述它，即

$$x_{n+1}+x_{n-1}=2Cx_n+2x_n \tag{4.1.11}$$

其中 $C=\cos 2\pi Q$。

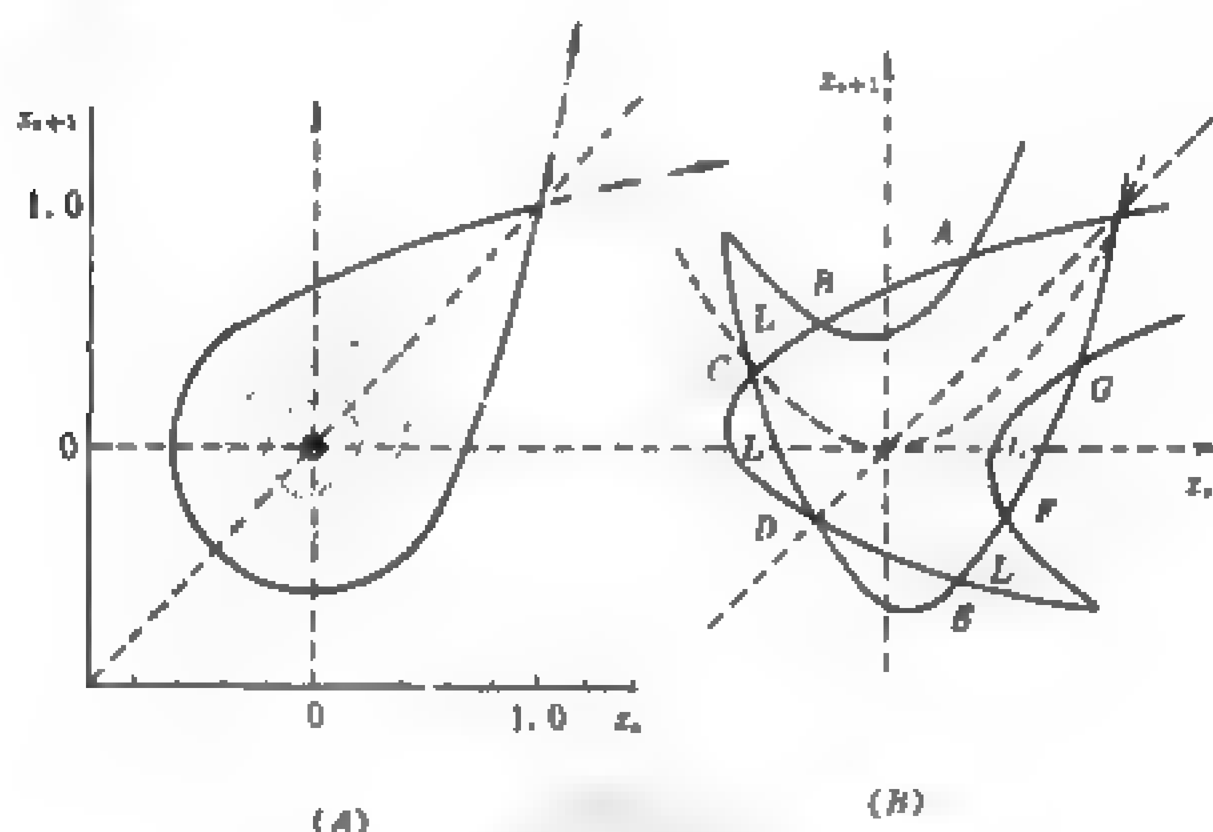


图 4-4　同宿轨道(A)与同宿相交(B)

那么通过这一两阶差分方程可求得两个不动点 $x_{n+1}=x_n=x_{n-1}=0$ 与 $1-C$，容易看出，$C<1$，$x=0$ 始终为椭圆不动点，$x=1-C$ 总是双曲不动点。下面令 $C=0$，对这一参数假定下的系统动力行为作一描述。此时，$x=0$ 点的本征值 $\lambda_{1,2}=\pm i$，$x=1$ 点的本征向量方向分别为稳定流形和不稳定流形的运动方向。对于一个可积系统，由双曲不稳定流出发的点，经过迭代会回到其稳定流形

上，然后趋近不动点，如图 4-4(A)。而对于不可积系统，双曲点的稳定流形与不稳定流形将发生同宿相交，如图 4-4(B)。图中 A，B，C，D，E，F，G 为同宿点。有这样的已被证实的事实(在 Melnikov 方法一节时阐述其机理)，当稳定流形与不稳定流形发生一次同宿相交，将会出现无穷多次的同宿相交，在双曲点的领域内将有无穷多的同宿点，其中就有混沌运动。在图 4 4B 中，在椭圆点$(x_n, x_{n+1})=(0,0)$的领域中存在不变曲线。若进一步研究不变曲线的内部结构，将会发现其内部存在周期轨道的椭圆点和双曲点，双曲点的领域中存在着混沌运动，由于这一不变曲线的结束，混沌轨迹不会逃逸到无穷远处去，因此对储存环的应用目的说来，不变曲线内部的运动是稳定的运动。

三、低维 Hamilton 系统中的正则映象

在上一节中我们已经提及用作用角变量形式或可以将二自由度系统中可积系统和近可积系统分开。

二自由度的可积系统由 $H=H(J_1,J_2)$描述，它的运动轨迹：

$$\theta_1=\omega_1 t+\beta_1 \tag{4.1.12A}$$

$$\theta_2=\omega_2 t+\beta_2 \tag{4.1.12B}$$

处于二维环面 $s^1\times s^1$ 上。如果 $\alpha=\omega_1/\omega_2$ 为有理数，即 ω_1 与 ω_2 可公度，我们有周期轨迹。如为无理数，即 ω_1 与 ω_2 不可公度，我们有准周期轨迹，且轨迹将布满整个环面 $s^1\times s^1$。采用 Poincaré 截面。轨道与 Poincaré 截面的交点处于 $J_1=$常数的圆上。相继两次相交的时间间隔为 $\Delta t=2\pi/\omega_2$，所以每次前进 $\omega_1\Delta t=2\pi\alpha(J_1)$，那么第 $n+1$ 次交点与第 n 项交点的关系可写作

$$\begin{aligned}J_{n+1}&=J_n\\ \theta_{n+1}&=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1})\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

该式称为挠映象，θ 称为转数。挠映象的转数 θ 与半径 J 有关。它为一保面积映象。对于挠映象，周期轨道位于圆上的孤立点。位于圆上的点都有相同的周期。即如对于挠映象，周期轨道位于圆上的孤立点。位于圆上的点都有相同的周期。即如以圆上的任一节为初始点，迭代结果仍位于圆上，并都有相同的周期。准周期轨道则

在所在圆上处处稠密。周期轨道与准周期轨道都位于不变圆上。

现在考虑一个二自由度的受扰系统：

$$H(J,\theta)=H_0(J)+\epsilon H_1(J,\theta) \qquad (4.1.14)$$

H_1 为 θ 的周期函数，当 ϵ 小时 H 为一近可积系统。我们期望，θ 等于常数的 J-θ 截面上与 $H_0(J)$对应的挠映象由于存在 ϵ 项而变为受扰挠映象：

$$\begin{aligned} J_{n+1}&=J_n+\epsilon f(J_{n+1},\theta) \\ \theta_{n+1}&=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1})+\epsilon g(J_{n+1},\theta_n) \end{aligned} \qquad (4.1.15)$$

由正则方程可见到 ϵ 的一级项，在考虑 J_1，ϵ 的扰动时可以从 J_2。未受扰的，即$(J_2)_n$，$(\theta_2)_n\to(J_2)_{n+1}$，$(\theta_2)_{n+1}$可作为挠映象对待，是保面积的。因此该式必是保面积的映象。一个保面积的映象可以正则变换值生成。选最普遍的受扰形式的生成函数：

$$F_2=J_{n+1}\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1})+\epsilon g(J_{n+1},\theta_n) \qquad (4.1.16)$$

由此可得

$$\begin{aligned} J_n&=\frac{\partial F_2}{\partial\theta_n}=J_{n+1}+\epsilon\frac{\partial g}{\partial\theta_n} \\ \theta_{n+1}&=\frac{\partial F_2}{\partial J_{n+1}}=\theta_n+2\pi\frac{\partial\alpha}{\partial J_{n+1}}+\epsilon\frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \end{aligned} \qquad (4.1.17)$$

对于许多有意义的二维映象，$g=g(\theta_n)$，使受扰映象成为径向挠映象：

$$\begin{aligned} J_{n+1}&=J_n+\epsilon f(\theta) \\ \theta_{n+1}&=\theta_n+2\pi\alpha(J_{n+1}) \end{aligned} \qquad (4.1.18)$$

作适当的迭代运算，并引入新的作用变量：

$$I_n=2\pi d\,\Delta J_n \qquad (4.1.19)$$

得到广义标准映象：

$$\begin{aligned} I_{n+1}&=I_n+kf^*(\theta_n) \\ \theta_{n+1}&=\theta n+I_{n+1}(\mathrm{mod}\ 2\pi) \end{aligned} \qquad (4.1.20)$$

如果 $f^*(\theta)=\sin\theta$，那么此映象也称为Chirikoo Taylor 映象。

也可以把径的挠映象对应于运动方程：

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\epsilon f(\theta)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=2\pi\alpha(J) \tag{4.1.21}$$

它是下述 Hamilton 函数的正则方程

$$H(J,\theta,t)=2\pi\int^{J}\alpha(J)dJ-\epsilon\int^{\theta}f(\theta)d\theta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m) \tag{4.1.22}$$

这是一个非自治系统，它描述周期脉冲作用下的单自由度周期系统的运动。

上述正则映象描述的都是不可积系统，ϵ 很小时可看作近可积系统。现考虑等离约束器件中的磁场拟形问题，以此来看上述形式的应用。图 4-5 为一环形器件。由此可写出磁力线方程：

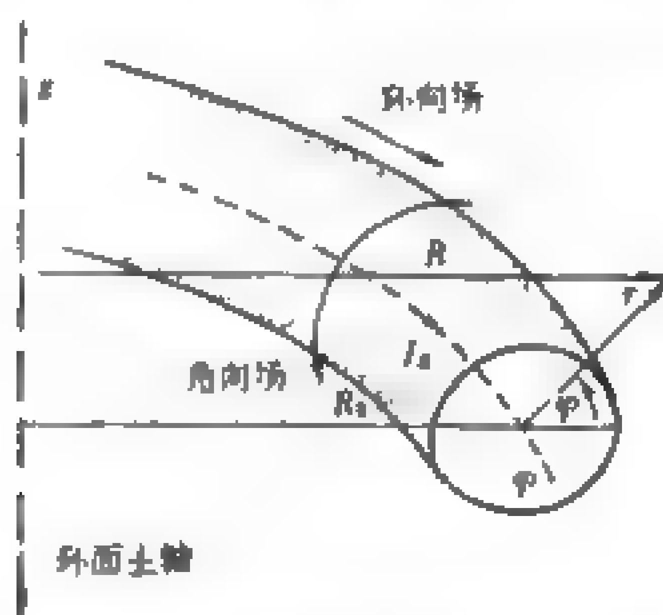


图 4-5　环形器件的构形与磁场方向示意图

$$\frac{dr}{B_r}=\frac{rd\varphi}{B_\varphi}=\frac{Rd\psi}{B\psi} \tag{4.1.23}$$

当 $R\gg r$ 时，可近似地取

$$(B_r,B_\varphi,B_\psi)=(0,B_\varphi(r),B_0) \tag{4.1.24}$$

定义 $J=\frac{1}{2}r^2$，$\oint J\mathrm{d}\varphi=\pi r^2$，取 ψ 为时间变量，则方程可写成：

$$\frac{dJ}{d\psi}=0,\ \frac{d\varphi}{d\psi}=\omega(J)\equiv\frac{R_0}{r}\frac{B_\varphi(r)}{B_0} \tag{4.1.25}$$

相应的 Hamilton 量为

$$H_0(J)=\int_J \omega(J)\mathrm{d}J \tag{4.1.26}$$

它是一个可积系统。如果电流与磁场的耦合将产生一个扰动项，它显然是 φ 的周期函数。用 Hamilton 形式表述为：

$$H=H_0(J)+\varepsilon H_1(J\varphi+\omega(J)\psi,\psi) \tag{4.1.27}$$

这是一个近可积系统，也可进一步推证它为一个二维的保面积映象。

第二节　KAM 定理

一、KAM 定理

在上一节中我们已经看到对可积系统的微扰将破坏其可积性。随着微扰的增强，能量表面上存在不变环面的区域将逐渐减少。这些都是近可积系统的性质，也就是说如果 Hamilton 函数 H 可以分出一项小扰动：

$$H=H_0+V \tag{4.2.1}$$

其中 H_0 是可积的，即可以变换到作用角度 θ，求得 N 个频率 ω_i，限制在 N 维环面上。现在的关键是 $V=0$ 时，H 的运动将呈现出怎么样的相图结构？

答案是由 Kolmogorov 在 1954 年根据上面提到的性质而提出了一条定理，在 60 年代被 Arnold 与 Moser 所进一步证明。Arnold 主要对多自由度的解析的 Hamilton 函数情况作了证明，Moser 则对二维保面积映象情况作了证明，通常称为 KAM 定理。它的证明涉及多体问题级数解的收敛性，成功地处理了其中遇到的小分母问题，这超出了本书的要求，但是其结论和图象是清楚易懂的。在此只限于表述定理的大意和一些物理后果。

KAM 定理有两个条件，即

第一，Hamilton 函数中可分离与不可积的扰动项 V 很小。

第二，未扰动的可积 Hamilton 函数 H_0 对应的频率满足不相

关条件，那么 Hamilton 函数 H 的绝大多数解（除去测度为零的集合）仍然留在 N 维环面上。这些环面的形状比起 $V=0$ 时可能略有改变，但运动的定性图象与未扰动的可积系统相同。

这一定理的结论初看之下有些出乎意料，令统计物理工作者失望，因为在统计物理学中常常从没有相互作用的理想系统出发，指出虽然理想系统不会趋近平衡，但只要计入无限小的相互作用，系统就可达到平衡。但 KAM 定理告之，即使有很弱的相互作用，系统运动仍可以限制在 N 维环面上，与理想系统差不多，这时根本不能使用等能面上或等能面附近的系统平均。显然统计特性的适用处必然是 KAM 定理不适用处。事实也是如此，许多理想系统，如简谐振子的集合，并不满足 KAM 定理的第二个条件。

二、无理转数与 Moser 定理[6]

我们以最普遍的二维映象式：

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + \varepsilon f(J_{n+1}, \theta_n) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \varepsilon g(J_{n+1}, \theta_n) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

为模型来讨论一下 Moser 定理对 KAM 定理中二维映象的无数转数情况。现把上式写作：

$$\begin{aligned} J_1 &= J + f(J, \theta) \\ \theta_1 &= \theta + 2\pi\alpha(J) + g(J, \theta) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

其中 α 在受扰系统与不受扰系统下的转数不相同，α、f、g 是 J，θ 的解析函数，θ 为周期函数。

由于有理数与无理数是可以任意逼近的，或者说有理数是稠密的，所以必须明确无理数与有理数之间的距离概念。事实上这已经隐含在 KAM 定理的第二条件中，即

$$|m \cdot \omega| \geqslant \gamma |m|^{-\tau} \tag{4.2.4}$$

其中 τ 为无理转数，m 为整数，γ，τ 为两个给定的正数。

现在回到映象(4.2.2)式，并将它变形成：

$$\begin{aligned} T: r_1 &= r + f(\theta, r) \\ \theta_1 &= \theta + \alpha(r) + g(\theta, r) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

假设 f，g 充分小，在平环 $a_0 \leqslant r \leqslant b_0$ 上 $\alpha'(r) \neq 0$，保面积的性质可表示为对任意线 $C: r = r(\theta) = r(\theta+1)$，其映象 TC 与 C 相交，在这

些假定下可保证：在平环 $a_0 \leq r \leq b_0$ 中存在 T 的不变曲线。

为简化问题，我们进一步假定：

$$x=\theta, y=a(r)/\beta, \beta=|a(b_0)-a|(a_0)|>0 \quad (4.2.6)$$

在这一新的变量下映象就变形为：

$$\begin{aligned} x_1 &= x+\beta y+g(x,y) \\ y_1 &= y+f(x,y) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

新的 f,g 与原 f,g 有同样的性质，$a \leq r \leq b, b-a=1$，那么总可找到 $\beta=1$。

在这假设下，*Moser* 定理可表述为：对一正的 ε 存在正的与其有关的 δ 使得在 $|f|+|g|<\beta\delta$ 情况，映象式(4.2.7)有如下形式的不变曲线，

$$x=\xi+u(\xi), y=v(\xi) \quad (4.2.8)$$

其中 u,v 为周期 1 的实解析函数，并满足

$$|u|+|v-\beta^{-1}\omega|<\varepsilon \quad (4.2.9)$$

参数 ξ 的选择使在式(4.2.8)上的诱导映象为简单转动：

$$\xi_1=\xi+\omega \quad (4.2.10)$$

其中 ω 为无理数。由此可见，Moser 定理把不变曲线的运动归结为平移式，这正像 Denjoy 定理把圆映象中的准周期运动归结为简单转动一样，是数值研究中的重要依据。Moser 定理的证明我们在此不必详述，但可以明确的是当 f,g 很小时，满足距离式的所有无理数都有一 KAM 不变曲线。

三、有理转数与 Poincaré-Birkhoff 定理[7]

KAM 定理告诉我们，对于充分远离有理数的无理转数，不变圆在受扰时仍保持其拓扑结构，只是在原相空间其形状偏离了未受扰时的圆。而在有理数及其领域处，KAM 定理不成立。Poincaré-Birkhoff 定理可以为有理转数领域的结构提供线索。

假定未受扰的挠映象

$$(4.2.11)$$

在有理圆 $a(J)=P/Q$ 上的任一点，都是映象的 Q 周期点。Poincaré-Birkhoff 定理指出：在受扰后，有 Q 的偶数倍 $2kQ$(k 是

某个正整数)个点仍是映象的 Q 周期不动点。利用受扰挠映象的保面积性，可容易地证明这一定理。

我们现以 $P=1, Q=3$ 的情形来论证这一定理。令挠映象为 T，并设 $\alpha(J)$ 是 J 的增函数。据 KAM 定理与 $\alpha(J)$ 的性质在 $\alpha(J)>P/Q$ 处必有一条 KAM 曲线，它的 T^Q 映象是逆时针方向的。因此，由于连续性，在这两个 KAM 曲线之间必存在一条曲线，它在 T^Q 映象之下，θ 坐标保持不变，如图 4-6 中实线所示。

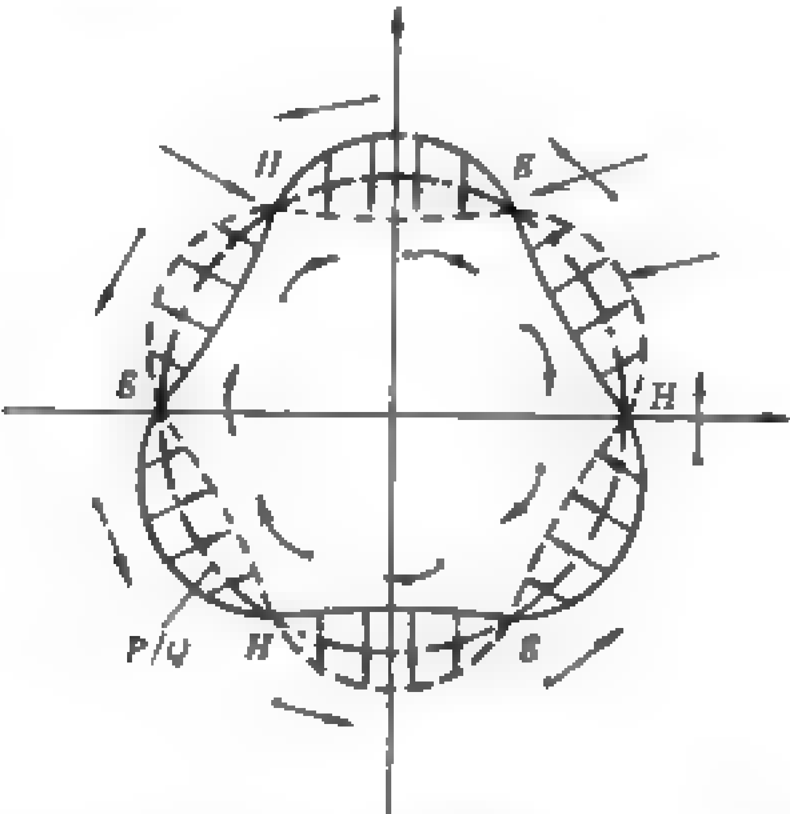


图 4-6　Poincaré-Birkhoff 定理示例，P=1，Q=3

映象把它径向地映象到图中的虚线上。这两条曲线不是 KAM 曲线。由于映象的保面积性质，这两条曲线必有交点而两条闭曲线必定有偶数个交点。这些交点都是 T^Q 的不动点，即 T 的 Q 周期点，所以有 2kQ(k=1,2,…)个不动点。

定理对 k 的数值没有断言，但一般地 k=1。如果进一步研究不动点领域的性质，可以发现有两类不同的不动点即椭圆不动点与双曲不动点。在椭圆不动点的领域，T^Q 映象是围绕不动点的。而在双曲不动点的领域，T^Q 映象最终使点离开不动点。这些行为与单摆问题中的椭圆不动点与双曲不动点领域的行为一样。椭圆点与双曲点形成一交错排列的链，椭圆点被规则的轨道包围，双曲点

之间由分界线连接。有关 *KAM* 曲线与相空间的进一步特性在下一节 *KAM* 环面破裂及 *Melnikov* 函数一节中阐述，到时读者会进一步发现 *KAM* 环面之间的复杂的动力行为和 *KAM* 环面破坏后的动力行为。

四、KAM 环面的破裂及 Arnold 扩散

我们已经知道 KAM 定理中的任何一个条件破坏了就会出现随机运动。先来讨论一下 Arnold 扩散。

既然满足 KAM 定理的绝大多数轨道，其运动仍然限制在 N 维环面上，自然可以提出这样的问题：这些 N 维环面能否成为等能面的边界，使 KAM 定理束缚不住的少数轨道被限制在边界的一面，而达不到另一面。如果能够做到这一点，那么那些迷走轨道的运动虽然已是不稳定的但仍然限制在等能面的一定区域内，从整体上看，还是具有某种稳定性的。

N 个自由度的系统，具有 $2N$ 维的相空间和 $2N-1$ 维的等能面，因此，等能面的边界是 $2N-2$ 维的超曲面。N 维环面要成为等能面的边界，就必须满足 $N\geqslant 2N-2$。可见只有 $N\leqslant 2$ 的系统，N 维环面才可能把等能面包围起来或分割成几部分。只要 $N\geqslant 3$，迷走轨道就可以逐步发散到整个等能面上去。这是一种很慢的类似扩散的过程，称为 Arnold 扩散。Arnold 扩散的存在不仅在一些简单模型中有严格的证明或计算机实验的演示，而且在磁约束等离子体式粒子对撞机中作为不稳定性的一种来源，成为物理工作者必须考虑的现象。

KAM 定理是关于近可积系(Hamilton 系统)运动稳定性的论判。混沌，遍历，随机性等等，是稳定性的对立面。在 KAM 定理的两个条件不成立时，迷走轨道的数目越来越多，运动逐渐地布满整个等能面上。我们现在就定性地讨论 KAM 定理的条件遭到破坏时，N 维不变环面逐渐消失，混沌行为是如何出现的。这个过程首先是由 Henon 想用一皆并的不可积 Hamilton 系统为例，以数值计算来说明的。他们的工作以 KAM 定理和已有的动力系统结果作为背景。

例：Henon 等人研究了具有非线性耦合的双振子系统。其 Hamilton 函数是

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+q_1^2+q_2^2)+q_1^2q_2-\frac{1}{3}q_2^3 \qquad (4.2.12)$$

这个自由度为 2 的系统具有四维的相空间。为了形象地表示出计算结果，取 q_1，p_1 固定的截面，在 (q_2,p_2) 平面上观察系统的时间演化。取相空间中某点为初值，积分由 Hamilton 函数得到的运动方程。每当轨道按一定方向穿过 (q_2,p_2) 平面，就将相应的交点 $P_n=(q_2^{(n)},p_2^{(n)})$ 记录下来，这样就得到一个离散点列 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n,P_{n+1},\cdots$。于是 Hamilton 函数所决定的连续流，在 (q_2,p_2) 平面中就表现为离散点的映象：

$$P_{n+1}=TP_n \qquad (4.2.13)$$

这就是所谓的 Poincaré 映象。这是非常的重要的研究手段，具体地说，相空间中不同初值可能对应不同的运动类型。只要运动是有界的，轨道穿过一次 (q_2,p_2) 平面后，迟早会第二、第三次穿过。最简单的情形是每次都从同一点穿过。这就是不动点：

$$P_0=TP_0 \qquad (4.2.14)$$

相空间中的运动是一条简单的闭曲线。

如果原来的轨道在二维环面上，那就要区分两种情况，当决定二维环面的两个频率之比是有理数时，轨迹是绕在环面上的封闭曲线，对应于 Poincaré 截面上有限个点。例如 m 个点，$P_1,P_2,\cdots,P_m,P_{m+1}=P_1,\cdots$ 那么这些点称为 T^m 的不动点

$$P=T^mP_0 \qquad (4.2.15)$$

当上述频率比为无理数时，运动轨道绕满整个环面，无始终。对应于 Poincaré 截面上的一条封闭曲线。

高维环面与二维环面的截迹也是一些点或封闭曲线在相空间中迷走轨道，在 Poincaré 截面上看出来是随机分布的点。

我们也可以抛开原来相空间中的轨道，只考虑 Poincaré 映象。孤立的不动点有稳定与不稳定之分。稳定不动点附近是一些同心圆，沿椭圆发生准周期运动。这样的点称为中心不动点。不稳

定的不动点则是双曲点，其附近是双曲线分点，任何沿稳定方向趋近不动点的运动，最终都要沿不稳定方向离开不动点。对于保守的 Hamilton 系统，Liouville 定理保证相体积不变，因此我们排除了在领域中单纯压缩的稳定焦点或结点，以及单纯膨胀的不稳定结点或焦点。在下一章耗散系统的研究过程中会遇到。

对于 Poincaré 截面中的封闭椭圆，可以局部地引入极坐标 (r,θ) 来描述截面上的点在映象 T 作用下的运动，即

$$P(r_{n+1},\theta_{n+1})=TP(r_n,\theta_n) \tag{4.2.16}$$

每次映象的平均转动角，称为转动数(rotation number)：

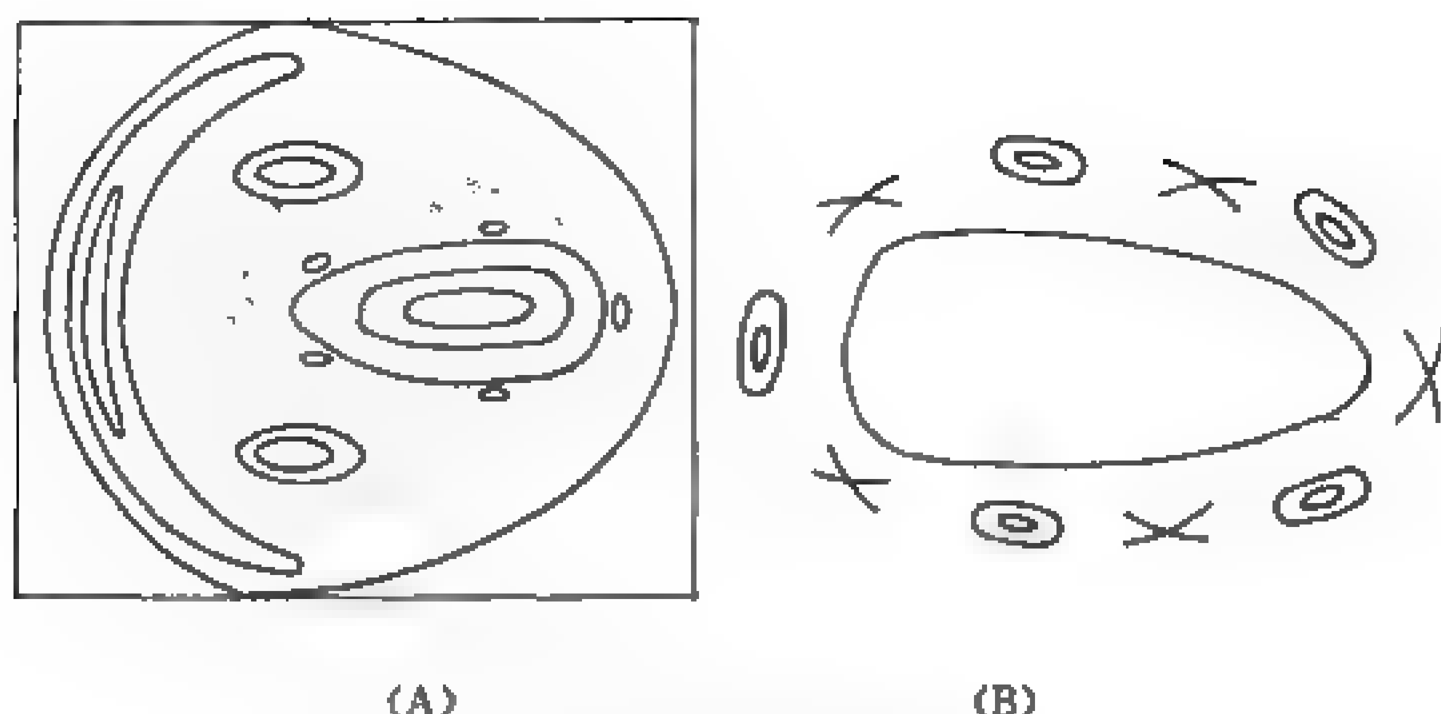
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{2\pi n} \tag{4.2.17}$$

经常地理解为平均转动频率，因为频率为 v 的连续周期运动 $\cos(2\pi vt+\varphi_0)$，角度增量是 $\Delta\varphi=2\pi v\Delta t$，而离散映象乃是 $\Delta t=1$ 的跃变。在我们关心的情形下，ρ 与 (r_0,θ_0) 的选择无关，转动数是整个准周期运动的特征。ρ 等于有理数时，即 n/m 是整数比，因为有理数是稠密的。如果不固定 m，ρ 总可以很接近另外两个整数之比，相应的环面称为有理环面。否则是一种无理环面，也就是比值不可能无限接近。

现在讨论 KAM 环面破坏过程的准备知识已具备。对于 Hamilton 函数，取总能量 E 作控制参数。Henon 等的计算结果，在 E 较小时满足 KAM 定理的要求，Poincaré 截面上由一些环面截迹组成。图 4-7 是 $E=1/8$，其中每一椭圆由一条轨迹生成，而弥散分布的各点由另一条轨迹产生。

当 E 继续增加时，有理环面首先消失。其实图 4-7A 图的右侧几个围着中心不动点的小圈，就是 $m=5$ 的有理环面的痕迹。这几个中心不动点之间，还夹有几个看不见的双曲点。若放大分辨率，它们之间的排列大致如图 4-7B 所示，这里双曲点附近只画了两条分界线。那么分界线的走向如何又是一个问题。

Poincaré 早在上世纪末就知道其中可能发生相当复杂的动力行为。一条不稳定分界线离开一个双曲点，并不作为稳定轨道直接



(A)　　　　　　　　　　(B)

图 4-7　Henon-Heile 模型($E=1/8$)

进入另一个双曲点，而是在无穷次折叠中逐渐趋近于该点，在折叠过程中与另一条稳定轨道无穷次相交。如果所涉及的双曲点来自同一个有理环面，这样的点横截交称为单褶点(同宿点 homoclinic point)。如果来自不同的有理环面则称为杂褶点(异宿点 heteroclinic point)如图 4-8，如果系统中出现了一个单褶点，则必定存在着无穷多个单褶点。稳定分界线与不稳定分界线的相交与相切还可能出现多种其他组合[8]。所以根据这里的结构图 4-7 中每个中心不动点附近仍存有理和无理之分。在更小尺度上重复着有环面的破裂，出现交错的椭圆点和双曲点，同时出现横截交的现象。只要有足够的分辨力，这种几何结构就清晰可见。这就是所谓的“无穷嵌套的自相似的几何结构”。

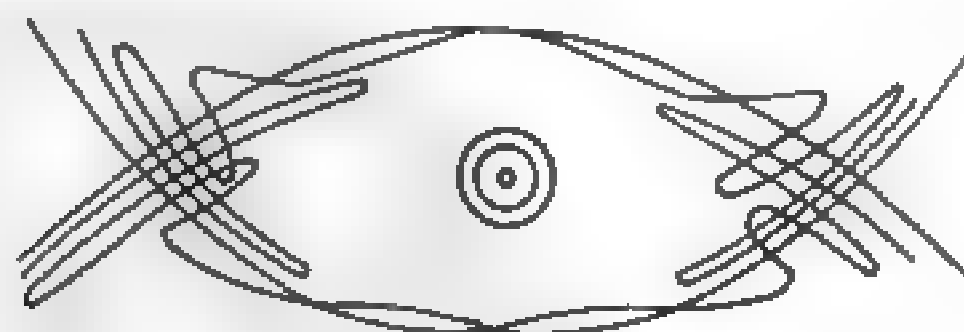


图 4-8　单褶点的产生

五、共振重叠判据[8]

前几节已对二维映象的情况从定性上讨论了共振区的结构及混沌的出现等问题。由于混沌出现机制的重要性，本节试图更直观地讨论这些问题。

首先讨论共振的宽度问题。考虑一个二自由度系统的 m,n 共振，只保留式中 Fourier 展开中的 m,n 项即：

$$H(J_1,J_2,\theta_1,\theta_2)=H_0(J_1,J_2)+\varepsilon V_{mn}(J_1,J_2)\cos(m\theta_1-n\theta_2) \tag{4.2.18}$$

其共振条件为 $m\omega_1=m\omega_2$。通过适当的坐标变换和造取适当的正则变换生成函数，可得到 Hamilton 函数

$$H(p,\psi)=\frac{p^2}{2M}+\varepsilon V_{m,n}(J_0)\cos\psi \tag{4.2.19}$$

式中 $M^{-1}=m^2\omega_{11}'(J_0)$，为未受扰系统的满足的作用变量值。

通过上述的近似，把任一共振区的局部问题化为一个单摆问题。ψ 的小振动频率为 $\omega_\phi=\sqrt{\varepsilon V_{mn}/M}$。上式的分界线的方程为

$$P_{st}=\pm M\omega_\phi\sin\frac{\psi}{2}; \tag{4.2.20}$$

再根据已选之正则变换，可以算出分界线方程，

$$J_{st}=J_0\pm(\Delta J_r)\sin\left(\frac{m\theta-n\tau}{2}\right) \tag{4.2.21}$$

式中 $\Delta J_r=2mM\omega_\phi=2m\sqrt{\varepsilon MV_{mn}}$，它可以称为 J 的共振半宽度。频率的共振半宽度为 $\Delta\omega_r=\omega'_1\Delta J_r=\frac{2}{m}\sqrt{\varepsilon V_{mn}/M}=\frac{2\omega_\phi}{m}$。例如标准映象中的共振，它的 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}I^2+K\cos\theta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m) \tag{4.2.22}$$

通过对 δ 函数的 Fourier 变换，H 写作

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}I^2+K\cos\theta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(i2\pi nt)\\&=\frac{1}{2}I^2+K\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(\theta-2\pi mt)\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

取式中任一 m 对应的项，可以得到一种共振。再同(4.2.19)式比

较可得共振位于 $J_0=2n\pi$，而任一 m 共振半宽度都是

$$\Delta\omega_r=\Delta J_r=2\sqrt{K} \tag{4.2.24}$$

共振区的分界线是最不稳定的，因此如果两个共振区的分界线发生重叠将使共振区之间的 KAM 曲线破缺，发生整体混沌。这就是 Chirikov 关于整体混沌的共振重叠判据。这个判据既不是必要的也不是充分的。但在定性估计上起了较大作用。具体估计如下，各共振区距离为 $\Delta J_0=2\pi\Delta n=2$。据共振重叠判据，它应在 $\Delta J_0=2\Delta J$ 时发生整体混沌即在 $K=\pi^2/4=2.47$ 时发生整体混沌。

如果要考虑二次共振，三次共振，那么就需要在坐标变换和正则变换作适当调整，处理的思路还是相似的，我们在此不再进一步讨论。但有几点结果还是值得注意的，其一是黄金分割数对应的 KAM 曲线是最后破缺的曲线。其二，共振重叠是一种近似的物理概念，如想用上述方法去获取精确解则是勉强而又费事的。其三，作为定性分析这是极可取的方法，它能给出量级上正确的临界值。

六、太阳系中的混沌

如第二章所述，天体力学系统是典型的保守系统。通常把太阳系的运动描述成一种很规则的运动。但就目前的研究发现太阳系中也存在混沌运动。Winsdom 用保守系统混沌分析的办法解决了太阳系中两个长期没有解决的难题，即太阳系小行星带的 Kirkword 间隙问题与地球上流星的起源问题[10]。

火星与木星之间存在着一个小行星带，太阳系中的小行星大部分位于这个带中。其中几个直径超过一公里的小行星有完全确定的轨道。作出的行星数目随轨道周期的分布图，可在四处周期处发现明显的间隙。这些周期与木星周期 11.9 年之比为简单的分数 1/3，2/5，3/7，1/2。这些间隙称为 Kirkword 间隙。周期比为简单的分数表明存在一种共振现象。根据前面共振重叠判据的内容说明共振区内存在着混沌行为。混沌运动可能使这一区域内小行星逃逸。但是长期以来，人们不明白 Kirkword 间隙的机理。Wisdom 注意到小行星的运动存在着几个标度差别很大的频率，并利用映象的办法研究了这个问题。例如 1/3 间隙中小行星的周期小于 4

年。由于与木星运动共振产生的长轴的振动周期为几百年，而其近日点的进动周期为几万年。据此，Wisdom在平面与小偏心率近似下，把微分方程问题简化为映象问题，以木星周期采样。计算发现，在开始的20万年内没有出现什么反常现象，偏心率在10%以内振动。在2×10^5年以后，偏心率的变化增大，并突然涨落至35%。这足以使小行星与火星发生近碰撞，从而脱离小行星带。这就是形成Kirkword间隙的原因。在Wisdom的研究工作之前，曾作过的最长的数值计算也不到10^5年。采用映象的办法把计算时间成千倍地缩短，才发现了混沌运动。

与小行星带有关的另一疑难问题是地球上流星的起源问题。太阳系的小行星大部分于火星与木星之间，因此地球上的流星也只能起源于这一小行星带。但是这个行星带离地球很远，只有偏心率达到57%的小行星的轨道才能与地球轨道相交。Wisdom进一步把非共面效应考虑进去。所谓非共面效应就是指木星轨道平面相对小行星带的缓慢变化，发现混沌运动确实可以使偏心率达到60%。为了得到令人信服的结果，他还用数值积分方法求解偏微分方程，对单个试验行星积分到10^6年，证实了偏心率确实可以超过57%。根据上述计算，能够给出与观察一致的流星轨道与丰度，特别是所谓"下午效应"，即下午观察到的流星是上午的两倍。

太阳系中另一个混沌运动的例子是木星的卫星Hyperion，它比月球小，是一颗高度非球对称的卫星，其短径为200km是其长径的一半。这使得它可能有很强的自旋轨道耦合。Wisdom用Chirikov的方法分析了其自旋轨道共振问题。太阳系中有两个典型的自旋共振的例子。水星具有3/2自旋轨道共振，当它绕太阳公转两周时正好自转三周。地球的卫星，月球的自转则与公转同步。由于潮汐效应，其公转周期与自转周期相同，因此始终是同一半球朝向地球。而木星的卫星Hyperion看来处在3/2共振与1/1共振重叠区，它有同时发生3/2共振与1/1共振的趋势。这使它产生了混沌运动，其自旋的方向及速率都出现了混沌涨落。这个结果有待于解完全的牛顿-欧拉方程来证实。观察表明，Hyperion是在翻筋

斗，并经常地改变其转动速率。如果这些推测能被进一步证实，Hyperion 将成为太阳系中具有混沌运动的永久成员的第一个事例。

第三节　整体混沌的发生

一、贵重 KAM 曲线与临界点

在近可积系统中，与共振相联系的双曲点与分界线的领域存在着混沌运动。当扰动非零时，始终存在着混沌区域，其面积随扰动趋向零而趋向零。因此混沌运动突然转变可称为局部混沌到整体混沌的转变。在局部混沌情况，混沌运动被 KAM 表面限制在局部区域中。在整体混沌情况，相空间大部分区域的混沌运动互相联系在一起。据 KAM 定理容易想到，这个转变发生在一级共振中具有无理转数的最后 KAM 曲线遭到破坏的时刻。这条最后的 KAM 曲线通常是黄金分割数对应的曲线，也就是贵重 KAM 曲线。这一曲线仍可根据 KAM 定理进行计算，并由此决定整体混沌转变的临界点。

我们先来探讨一下贵重曲线。已知无理数的最佳展开形式为：

$$\alpha=\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{1}{m_3+\cdots}}} \tag{4.3.1}$$

或 $\alpha=\{m_1,m_2,m_3,\cdots\}$。其有理数近似 $\alpha_n=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}=P_n/Q_n$，当能找到一个 $Q<Q_n$ 使得 P/Q 比 P_n/Q_n 更接近 α，连分数对 α 的逼近是振荡的。P_n/Q_n 对 α 的收敛程度为：

$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_nQ_{n-1}} \tag{4.3.2}$$

对于大的 Q，它正比于 Q^{-2}。对于 $\alpha=\pi-3=0.14159\cdots$，其连分数展开为{7，15，293，……}，$mn$ 的快速递增表示连分数快速收敛于 α。在这种意义下，我们就认为 $\alpha=\{1,1,1,\cdots\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是离开有理数最远的。一般说来，当其他条件相同时，最后遭到破坏的

KAM 曲线必是离有理数最远的曲线，它所对应的曲线就是前面提及的贵重 KAM 曲线。但是一般来说，决定到整体混沌性转变的最后 KAM 曲线不只决定于转数的无理程度，而且还与一级共振之间的相互作用有关，因此它们的转数不一定都是黄金分割数。

讨论最后 KAM 曲线的一种形象化的方法是重正化方法。它把原 Hamilton 函数重正化，得到一系列新的 Hamilton 函数，这些 Hamilton 函数描述原系统依次增加的高级共振。Escande 与 Doveil 考虑了一个二共振的系统，其中一个为主共振，另一个为扰动共振。忽略“扰动”共振，系统是可积的。扰动使这个可积系统产生许多一级共振。保留限定所讲 KAM 曲线的两个相邻共振项，把其他项平均掉，就得到一个与原 Hamilton 函数有相同形式的 Hamilton 函数。上述即为一个与原 Hamilton 函数之间的重正化群的变换。

当这个重正化群变换有稳定的不动点时，表明重正化过程中高级共振的相对振幅趋向零，因而存在稳定的 KAM 曲线。在 KAM 曲线为 J 等于常数的坐标系中，可由图 4-9 表示这一重正化过程。

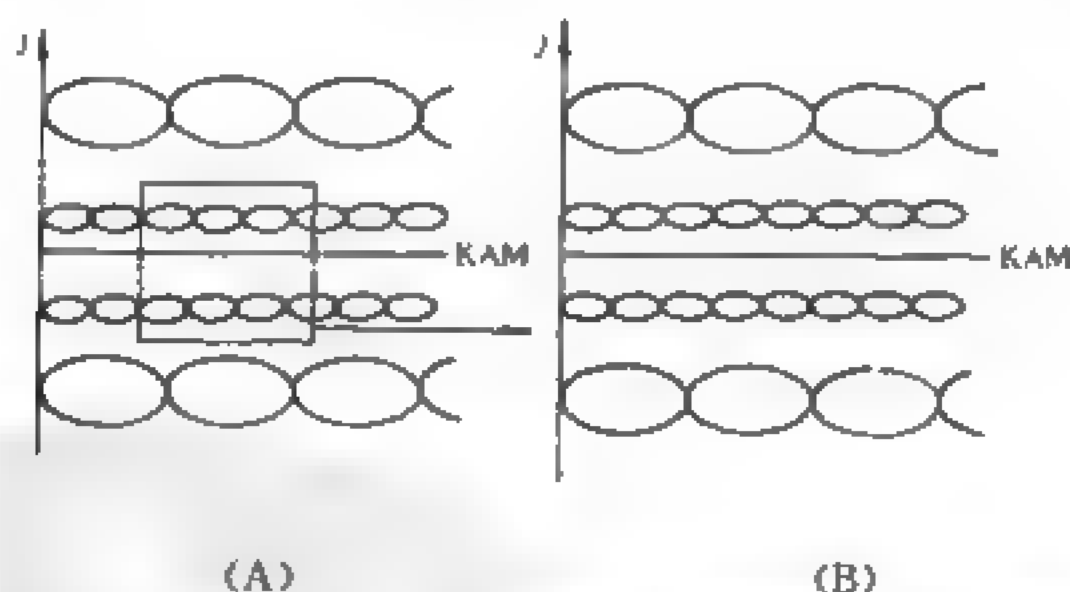


图 4-9 确定临界 KAM 曲线的重正化群方法，图 A 中方框部分放大后得到与原图一致的图 B

在转变的临界点以下，每次放大以后的图中靠近 KAM 曲线的两个主要共振的振幅指数地减小，在转变的邻界点以上它们指数地增加。在临界点处，它们趋向一个常数，因此放大后的图形与

原图形相同。

Greene 发展了对标准映象的最后 KAM 曲线的准确的数值方法[11]。在计算中，引入了余数：

$$R=\frac{1}{4}(2-\mathrm{Tr}A) \tag{4.3.3}$$

式中 A 是 Q 周期不动点的 Q 个 Jacobi 矩阵的有序乘积。对于标准映象

$$A=\prod_{i=1}^{Q}\begin{pmatrix}1 & k\cos 2\pi\theta \\ 1 & 1+k\cos 2\pi\theta\end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

设 A 的两个本征值为 λ_1,λ_2，又因 $det|A|=1$，所以只有如下可能：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，$|\lambda|=1$ 或 $\lambda_1\times\lambda_2=1$。在后一情况，$\lambda_1$ 与 λ_2 是实数，周期点是不稳定的，属于双曲点。在前一情况，除 $\lambda_k=1$，$k\leqslant 4$ 以外（这时线性稳定性不足以描述不动点邻域的行为），周期点是稳定的，属于椭圆点。显然，椭圆点的 $|TrA|<2$，双曲点的 $|TrA|>2$。所以 $0<R<1$ 时周期点稳定，$R<0$ 或 $R>1$ 时周期点不稳定。

Greene 对一固定的参数 K 与无理数 α_1，依次计算了由连分数逼近 $\alpha_n=P_n/Q_n$ 所确定的 Q_n 周期点，并计算余数。发现对于椭圆点(e)与双曲点(h)，其余数在 $n\to\infty$ 时分别有下述结果：

$$\lim_{n\to\infty}R_n^e(k)=\begin{cases}0^+ & k<k_0\\ b & k=k_0\\ \infty & k>k_0\end{cases} \tag{4.3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}h_n^h(k)=\begin{cases}0 & k<k_0\\ -b & k=k_0\\ -\infty & k>k_0\end{cases} \tag{4.3.5}$$

式中 a、b 是小于 1 的正数，k_0 表示临界点。这个结果与重正化群的思想一致，因此上面两式可以作为寻找临界点的判据。

二、临界 KAM 曲线的标度性

通常的保面积映象都具有一种对称性质，利用这种对称性质，我们可较容易地找出周期轨道。以标准映象为例：

$$T_k:\begin{cases}J_{n+1}=J_n+\dfrac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n\\ \theta_{n+1}=\theta_n+J_{n+1}\end{cases} \tag{4.3.6}$$

它可分解为

$$T_k = I_2 I_1 \tag{4.3.7}$$

其中

$$I_1\begin{pmatrix} J \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J + \dfrac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta \\ -\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.8}$$

$$I_2\begin{pmatrix} J \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ J-\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

并且有 $I_1^2 = I_2^2 = 1$,$\det I_1 = \det I_2 = -1$,Greene 注意到,任何 Q 周期点中至少有两个点是 I_1 或 I_2 的不动点。因此要找 Q 周期轨道只需要在 J,θ 平面中的四条线上找。这四条线是 $a=\{(J,\theta)\,|\,\theta=0\}$,$b=\{(J,\theta)\,|\,\theta=1/2\}$,$c=\{(J,\theta)\,|\,\theta=J/2\}$,$d=\{(J,\theta)\,|\,\theta=(J+1)/2|\}$。以 z 表示$\{(J,\theta)$,$z=(J,\theta)$,容易求得,$k=0$ 时,以 z_0 和为初值的转数为 $\alpha=P/Q$ 的轨道中位于式(4.3.6)的四条线上的点有如下三种情况:

(1) Q 奇,P 偶

$$\begin{aligned}
&z_0 \in a \Rightarrow (T_k^{(Q+1)/2} z_0) \in c \\
&z_0 \in b \Rightarrow (T_k^{(Q+1)/2} z_0) \in d \\
&z_0 \in c \Rightarrow (T_k^{(Q-1)/2} z_0) \in a \\
&z_0 \in d \Rightarrow (T_k^{(Q-1)/2} z_0) \in b
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

(2) Q 奇,P 奇

$$\begin{aligned}
&z_0 \in a \Rightarrow (T_k^{(Q+1)/2} z_0) \in d \\
&z_0 \in b \Rightarrow (T_k^{(Q+1)/2} z_0) \in c \\
&z_0 \in c \Rightarrow (T_k^{(Q-1)/2} z_0) \in b \\
&z_0 \in d \Rightarrow (T_k^{(Q-1)/2} z_0) \in a
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

(3) Q 偶,P 奇

$$\begin{aligned}
&z_0 \in a \Rightarrow (T_k^{Q/2} z_0) \in b \\
&z_0 \in b \Rightarrow (T_k^{Q/2} z_0) \in a \\
&z_0 \in c \Rightarrow (T_k^{Q/2} z_0) \in d \\
&z_0 \in d \Rightarrow (T_k^{Q/2} z_0) \in c
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

这种性质当$k\neq0$时仍保持不变。由于每一Q_i有两个循环，一个是椭圆的，一个是双曲的，因此共有四个点位于对称线a,b,c,d上。而椭圆点中总有一个在a上，Greene把a线称为主对称线。

根据Moser扰定理，总可以把T_k的KAM曲线通过坐标变换：

$$J=S+v(t),Q=t+u(t) \tag{4.3.13}$$

变为无扰挠映象

$$S_{n+1}=S_n,t_{n+1}=t_n+S_n \tag{4.3.14}$$

其中u,v为t的周期函数，如果知道$u(0),v(0)$，那么$u(t),v(t)$可由

$$\begin{aligned}u(t+s)&=u(t)+v(t)+\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi(t+u(t))\\ v(t+s)&=v(t)+\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi(t+u(t))\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

求得。而S为KAM曲线的转数

Shenker与Kadanoff根据上述框架，对标准映象的贵重环面作了数值计算。计算做到$\Omega_{18}=2584/4181$，它与$\Omega=(\sqrt{5}-1)/2$的$|\Omega_{18}-\Omega|<3\cdot10^{-8}$。根据Greene的判式，求得$k_c=0.9716354$。在$k=k_c$时$u(t)$有明显的标度结构，同样根据前面述及的等式可求取$v(t),J(t)$与$\theta(t)$。并得到$t=\theta=0$与$t=\theta=1/2$处的标度律。

如同在一维映象中经常做的那样，首先讨论相邻两点的θ差：

$$d_i(t)=\theta_{Q_i}\left(t+\frac{1}{2\theta_i}\right)-\theta_{Q_i}(t) \tag{4.3.16}$$

当$k<k_c$时，$\theta(t)$的微商存在，因此

$$d_i(t)\sim Q_i^{-1} \tag{4.3.17}$$

当$k<k_c$时，$u(t)$不再是解析的，而且不同t处有不同的标度律。在$t=0$处，数值计算得

$$d_i(0)\sim Q_i^{-x_0},\ x_0=0.721\pm0.00 \tag{4.3.18}$$

相应的标度因子为：

$$\alpha_0=\lim_{i\to\infty}\frac{d_i(0)}{d_{i+1}(0)}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x_0}=1.4148 \tag{4.3.19}$$

另一个存在标度律的点是 $t=\theta=1/2$ 点。由于 $\Omega_i=F_i/F_{i+1}$ 随 i 增大时，轨道的对称性循环地取(1)，(2)，(3)模式，在 $t=1/2$ 点的标度律应写作

$$d_{3i+j}\left(\frac{1}{2}\right)\sim a_j Q_{3i+j}^{x_1},\ x_1=1.093\pm0.001 \tag{4.3.20}$$

式中 $j=0,1,2$，a_j 对不同 j 有不同值。相应的标度因子为：

$$a_1\lim_{i\to\infty}\left(\frac{d_{3i+j}\left(\frac{1}{2}\right)}{d_{3(i+1)+j}\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x_1}=1.6921 \tag{4.3.21}$$

相似地，可以讨论 J 方向的标度律。在 $k<k_c$ 时，有平庸的关系 $((J_{i+1}-J_i)/(J_i-J_{i-1}))\sim(F_i/F_{i+1})^2\sim\Omega^2$；在 $k=k_c$ 时，分别对应于对称线 $a(\theta=0)$ 与 $b(\theta=1/2)$ 有

$$((J_{i+1}-J_i)/(J_i-J_{i-1}))\sim(F_i/F_{i+1})^{y_0},\ y_0=2.329$$

$$((J_{3(i+1)}^b-J_{3i}^b)/(J_{3i}^b-J_{3(i-1)}^b))\sim(F_{3i}/F_{3(i+1)})^{y_1/3},\quad y_1=1.957 \tag{4.3.22}$$

由此得到 J 方向的标度因子：

$$\beta_0=\lim_{i\to\infty}(F_{i+1}/F_i)^{y_0}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{y_0}=3.069 \tag{4.3.23}$$

$$\beta_1=\lim_{i\to\infty}(F_{3(i+1)}/F_{3i})^{y_1/3}=2.564 \tag{4.3.24}$$

有意思的是，尽管 $t=0$ 与 $t=1/2$ 处 θ 方向的标度因子及 J 方向的标度因子都互不相同，但这两处的面积标度因子都是相同的。

$$\alpha\beta\equiv\alpha_0\beta_0\equiv\alpha_1\beta_1\equiv4.339 \tag{4.3.25}$$

这表明面积的标度律是更基本的标度性质。这是映象的保面积性质的结果。

余数只与线性化矩阵的迹有关，它对坐标变换是不变的，因此每一椭圆点(或双曲点)上有相同的余数 R_i^e 或 R_i^h。计算得到的贵重曲线上在 $k=k_c$ 时余数为 $R^e=0.2500888$，$R^h=-0.255426$。若研究 $R_i^{e,h}$ 在 $k=k_c$ 邻域的变化，可以得到在 k_c 邻域的标度律，如选 k 值使转数为 $\Omega_i=F_i/F_{i+1}$ 的轨道的 $R_i^e=$ 常数，这样的 k 值以 $1/\delta$ 的速率($\delta=1.6279$)几何地趋向 k_c。但是如取 $R_i^e=0.2500888$，解

以更快的速率 δ'/δ 收敛，δ' 为（-0.6108303），对于一般的情况，可以假设

$$R'_i = R'_\infty \Omega^{(k_c-k_i)\nu F_i} \tag{4.3.26}$$

保持 R'_i 为常数，让 $i\to\infty$，相当于 $(k_c-k_i)^\nu F_i=$ 常数，让 $i\to\infty$，$k_c-k_i\propto\delta^{-i}$。由此得

$$\nu=\left(\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\delta\right)^{-1}=0.9875 \tag{4.3.27}$$

三、重正化分析

上节的标度律表明，可以用重正化群的办法来讨论 KAM 曲线的临界性质。Kadanoff 与 Mackay 分别用不同的办法处理这件事。下面我们来看 Mackay 的结果。

标度律只在 (J,θ) 的某些点的邻域成立，不需要考虑函数的周期性。因此采用坐标 (x,y) 代替坐标 (J,θ)。根据分析力学，可以把 $(x,y)\to(x',y')$ 映象看作一个正则变换，它可以由生成函数 $\tau(x,x')$ 生成：

$$y'=\frac{\partial\tau(x,x')}{\partial x'},\quad y=-\frac{\partial\tau(x,x')}{\partial x} \tag{4.3.28}$$

x 相当于广义坐标，y 相当于广义动量。扭条件 $\det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i\partial I_j}\right|\neq 0$ 相当于 $\frac{\partial x'}{\partial y}=-\left(\frac{\partial^2\tau(x,x')}{\partial x\partial x'}\right)^{-1}\neq 0$。对于两个相继的变换 T 与 u，设其生成函数分别为 τ 与 u，则

$$y'=\frac{\partial\tau(x,x')}{\partial x'}=-\frac{\partial u(x,x')}{\partial x'} \tag{4.3.29}$$

所以可以把

$$\tau\oplus u(x,x'')=\tau(x,x')+u(x',x'') \tag{4.3.30}$$

看作是映象 uT 的生成函数，其中 x' 应满足条件

$$\frac{\partial[\tau(x,x')+u(x,x'')]}{\partial x'}=0 \tag{4.3.31}$$

对于由 $\tau(x,x')$ 生成的相继映象，则可把 $\tau(x_n,x_{n+1})$ 看作离散时间上的 Lagrange 函数，相应的作用量为：

$$A=\sum_n\tau(x_n,x_{n+1}) \tag{4.3.32}$$

其最小作用量原理即条件式：

$$y' = \frac{\partial r(x,x')}{\partial x'} = -\frac{\partial u(x',x'')}{\partial x'} \tag{4.3.33}$$

现在考虑映象$(\theta',J')=F(\theta,J)$及$(\theta_1,J)=R(\theta,J)$，易见R与F是对换的。设π_θ为到θ坐标上的投影，则转数的定义可以写作：

$$\Omega=\lim_{q\to\infty}\frac{\prod_\theta F^q(\theta,J)}{q} \tag{4.3.34}$$

对于一趋向无理转数的序列P_n/θ_n

$$\prod\nolimits_\theta F^{q_n}R^{P_n}(0,0)=Q_n\Omega-P_n\to 0 \tag{4.3.35}$$

在上式中我们把原点取在不变曲线上。根据上式$F^{q_n}R^{P_n}$应该具有标度性。引入标度变换B_n，研究序列

$$BF^{q_n}R^{P_n}B_n^{-1} \tag{4.3.36}$$

我们希望它可以用一系列重正化变换得到，设P_n/θ_n可表为连分数：

$$\frac{P_n}{\theta_n}=[m_0,m_1,\cdots,m_n]$$

$$=m_0+\cfrac{1}{m_1+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{1}{m_2\ddots+\cfrac{1}{m_n}}}} \tag{4.3.37}$$

对于任意(U,T)对，定义如下重正化计算符$N_m(u,T)=(u',T')$，$u'=BTB^{-1}$，有

$$N_m:T'=BT^mUB^{-1} \tag{4.3.38}$$

那么对应于连分数展开式的重正化序列为：

$$N_{m_n}\cdots N_{m_1}N_{m_0}(F,R)=(B_nF^{q_{n-1}}R^{P_{n-1}}B_n^{-1},B_nF^{q_n}R^{P_n}B_n^{-1}) \tag{4.3.39}$$

B_n为相继标度变换的乘积。在推导上式时应注意到F，R的对称性。

对于贵重KAM曲线，$\Omega=(1,1,\cdots,1)$重正化算符的定义为

$$N_1: u'=BTB'$$
$$T'=BTUB' \tag{4.3.40}$$

对于标度变换 B，采用与上节相同的符号：

$$B(x,y)=(\alpha x,\beta y) \tag{4.3.41}$$

对于生成函数(τ,u)，重正化变换式成为：

$$\begin{aligned} u'(x,x')&=\alpha\beta\tau\left(\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right)\\ \tau'(x,x')&=\alpha\beta u\oplus\tau\left(\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

因为 τ,u 与 x,y 有相同的次数，所以其标度因子为 $\alpha\beta$。

至此，已建立了重正化群方程，进一步的讨论就与在一维映象中已经作过的那样，由其不动点方程：

$$\begin{aligned} u'(x,x')&=\alpha\beta\tau\left(\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right)\\ \tau'(x,x')&=\alpha\beta u\oplus\tau\left(\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

求得 τ,u 与标度因子 α,β，由其线化方程的本征值的问题求得 δ。其算符定式中有一简单不动点：

$$T:\begin{cases} x'=x+y+1\\ y'=y\end{cases}$$

$$u:\begin{cases} x'=x+\bar{\omega}y-\dfrac{1}{\Omega} & \Omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ y'=y\end{cases} \tag{4.3.44}$$

$$B:\begin{cases} x'=-\dfrac{x}{\Omega}\\ y'=-\dfrac{y}{\Omega}\end{cases}$$

$y=0$ 相当于黄金曲线。上式对应于标准映象 $k<k_C$ 的情况。Mackay还讨论了不动点方程的另一解，它对应于标准映象 $k=k_C$ 时的非平庸情况。他假设 τ 与 u 对 $x=0$ 为对称的，从而求得了对称线领域的普遍映象 F^* 与普适常数：

$$\alpha_0=-1.414836062 \qquad \beta_0=-3.066888246$$

$$\delta_0=1.6279500 \qquad \delta'=-0.61083028$$

Mackay 求解重正化变换式非平庸不动点时采取的关键步骤是：改写变换式为：

$$u'(x,x')=\alpha\beta\tau\left(-\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right)$$
$$\tau'(x,x')=\alpha\beta u\oplus u\left(\frac{x}{\alpha},\frac{x'}{\alpha}\right) \tag{4.3.45}$$

取解域为：

$|x-0.050707985|\leqslant 0.502060282$，$|x'+0.655406307|\leqslant 0.329680205$

采用归一条件：

$$\frac{\partial u'(x,x')}{\partial x}\Big|_{x=0,x'=1}=0$$
$$\frac{\partial^2 u'(x,x')}{\partial x\partial x'}\Big|_{x=0,x'=1}=1 \tag{4.3.46}$$

由此，α，β 由下面方程决定

$$\frac{\partial\tau\left(x,\frac{1}{\alpha}\right)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$$
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\partial\tau(x,x')}{\partial x\partial x'}\Big|_{x=0,x'=\frac{1}{\alpha}}=1 \tag{4.3.47}$$

第四节　保守系统中的倍周期分叉

标准映象在 k 经过 k_C 时，发生到整体混沌的转变。但是这时 (θ,J) 平面上还存在许多的低周期稳定轨道，特别是有围绕不动点 $(\theta,J)=(0,0)$ 的二级 KAM 曲线所包围的区域。这个不动点随 k 值的增加会变为不稳定的，并分叉为 2 周期轨道，然后 2 周期轨道又失稳，并分叉出 4 周期轨道，这现象一直延续到混沌区域出现。在 $k>k_C$ 区域，倍周期分叉是保面积二维映象向混沌过渡的重要道路。

一、保面积映象的倍周期分叉

考虑标准映象

$$J_{n+1}=J_n-\frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta_n,\ \theta_{n+1}=\theta_n+J_{n+1} \tag{4.4.1}$$

在这里我们为讨论问题的方便，k 前取负号。取正号时，相当于把 θ

作一位移 $\theta\to\theta+1/2$。上式的转数为 P/θ 的轨道的 Jacobi 矩阵为

$$A=\prod_{n=1}^{q}\begin{bmatrix}1 & -k\cos 2\pi\theta_n \\ 1 & 1-k\cos 2\pi\theta_n\end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

轨道的稳定性由余数 $R=(1/4)(2-\mathrm{Tr}A)$ 表示，有三种可能性：

(1) $0<R<1$，轨道是稳定的，A 的本征值为复数。设 $\lambda_{1,2}=e^{\pm i2\pi v}$，则

$$R=\sin^2(\pi v) \tag{4.4.3}$$

当 $v=P'/Q'$ 时，在不动点的领域有次级的 Q' 共振产生或消灭。但不动点保持为稳定；

(2) $R<0$，轨道不稳定，$\lambda_1=1/(\lambda_2)>0$，轨道点为双曲点，也称“普遍双曲点”；

(3) $R>1$，轨道不稳定，$\lambda_1=1/\lambda_2>0$，轨道称为“反演双曲点”。在这种双点的分界线上作的迭代，在两个相反的方向跳跃地远离或逼近不动点。$R=1$ 相当 $v=1/2$，所以当不动点变成不稳定时，同时产生了一个 2 周期轨道。$R=1$ 处是倍周期分叉点。

我们再看一下标准映象式，它有两个不动点 $(\theta,J)=(0,0)$ 与 $(1/2,0)$。在 $k>0$ 时，$(1/2,0)$ 为双曲不动点。而 $(0,0)$ 在 $k=0\sim4$ 时为椭圆不动点。$k=4$ 时，$R=1$，$k>4$ 时 $(0,0)$ 点失稳，分裂为 2 周期轨道 $(\theta,2\theta)(-\theta,-2\theta)$，轨道点位于对称线 $J=2\theta$ 上，其中 $\theta_1=(k/8\pi)\sin2\pi\theta_1$。依次作一定的数值计算，可发现 $k=5.0731177\cdots$ 时 $R=1$，开始失稳并产生 4 周期轨道。相继的分叉点位置如表 4.4.1 所示。

表 4.4.1

n	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	…
k	4.000	5.073117	5.178	5.188	5.1895	5.1897	…

并由此可得到 2^{∞} 的 k 的收敛率 $\delta=8.721$。

如同讨论临界 KAM 曲线时已经看到的那样，在 (θ,J) 平面上，需要引进两个标度因子。但对于倍周期分叉，标度因子 α 与 β 不再分别对应于 θ 方向与 J 方向的标度。为了讨论这个问题，通常利用标准映象的 Devagelaere 形式来进行：

$$T_D: \begin{array}{l} x_{n+1} = -y_n + f(x_n) \\ y_{n+1} = x_n - f(x_{n+1}) \end{array} \tag{4.4.3}$$

式中

$$f(x) = x - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi x \tag{4.4.4}$$

容易检验，把 $x=\theta, y=-J+\frac{k}{4\pi}\sin 2\pi\theta$ 代入 T_D 映射中，将回到标准映象式，两者是完全等价的，也就是说两个映象差一拓扑共轭变换，因此有相同周期的轨道，并有相同的稳定性。如同上节中提及的方法可将 T_D 分解为两个反射算符之积：

$$T_D = I_2 I_1 \tag{4.4.5}$$

$$I_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \tag{4.4.6}$$

$$I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+f(x) \\ x-f(y+f(x)) \end{pmatrix} \tag{4.4.7}$$

容易检验，I_1 与 I_2 确有反射算符的性质：

$$I_1^2 = I_2^2 \tag{4.4.8}$$

由上述反射算符之积与其性质可得 $(T_D I_1)^2 = 1$，它表明 T_D 是可逆的，即存在逆变换：

$$T_D^{-1} = I_1 T_D I_1 \tag{4.4.9}$$

而且 T_D 映射的反射等于反射的逆映象：

$$I_1 T_D = T_D^{-1} I_1 \tag{4.4.10}$$

I_1 的不动点 $y=0$ 为 Devagelaere 形式映象的主对称线。这一线就是标准映象中的 $J=\frac{k}{4\pi}\sin 2\pi\theta$。在 Devagelaere 形式中，它把 $J=\frac{k}{4\pi}\sin 2\pi\theta$ 拉直了，这就有利于讨论。显然如果 T_D 可逆就推知 T_D^n 也可逆，因此可将 $I_1 T_D^{-1} = T_D I_1$ 推广到 $I_1 T_D^{-n} = T_D^n I_1$。它表明：如果周期轨道有一轨道点位于主对称线上，则该轨道的分布对于主对称线的反射必是对称的。读者要注意，上述对称性质与 $f(x)$ 的具体形式无关。I_1 可以看作时间反演算符。

现在可以定义标度因子 α 与 β。考虑一倍周期分叉序列 $Q_n=2^n$，选轨道的初始点 $[x(0), y(0)]$ 位于主对称线 $y=0$ 上，那么再取

n 为半周期，可得 $I_1\left(x\left(\frac{1}{2}\right),y\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(x\left(\frac{1}{2}\right),y\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 因此半周期点 $\left(x\left(\frac{1}{2}\right),y\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 也位于 $y=0$ 线上。定义

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_n(0)-x_n\left(\frac{1}{2}\right)}{x_{n+1}(0)-x_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \tag{4.4.11}$$

$x_n(1/2)$ 为半周期点的坐标，由于与单峰映象相似的理由，$x_n(1/2)$ 是最接近 $x_n(0)$ 的点。类似地，由于 1/4 周期点与 3/4 周期点互相反射对称，它们又是互相之间最接近的点，定义

$$P=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{y_n\left(\frac{1}{4}\right)-y_n\left(\frac{3}{4}\right)}{y_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)-y_{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)}\right] \tag{4.4.12}$$

经数值计算可得 $\alpha=-4.018$，$\beta=16.36$。

更细致的计算是在 Devageclaere 映象式中取

$$f(x)=f_p(x)=Px-(1-P)x^2 \tag{4.4.13}$$

来进行的。设参数 P 的倍周期分叉聚点为 P^*，主对称线上 x 的倍周期聚点为 x^*。数值计算得

$$P^*=-1.26631158692,\ x^*=-0.2360609$$

相度常数 δ,α,β 为

$$\delta=8.72097200,\ \alpha=-4.01807604,\ \beta=16.363896879$$

我们完全有理由作出 $P=P^*$ 时 (x,y) 平面上的倍周期序列的分布。当然这个时候它们都是双曲点。并可推知，$(x^*,0)$ 同时是 $(x_n(0),0)$，$(x_n(1/2),0)$，$(x_n(1/4),y_n(1/4))$，$(x_n(3/4),y_n(3/4))$ 的极限点。由于这一理由，可以期望 δ,α,β 的解由 P^*，x^* 的邻域性质得到，且 δ,α,β 分别表明了 p,y,x 三个方向的收敛率。

二、重正化群分析[18]

α、β、δ 对于保面积映象是一普适常数，它们应与具体映象无关地能由重正化群方程得到。根据上节讨论，在 (x,y) 坐标中，以 $(x^*,0)$ 为原点，映象 T 的重正化算符可以写作

$$R(T)\equiv BT^2B^{-1} \tag{4.4.14}$$

式中

$$B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \tag{4.4.15}$$

由 $R(T)$的不动点方程 $R(T)=T$ 可以求得 α 和 β,由 $R(T)$的线性化算符本征值方程可以求得 δ。Greene 等求解了这些方程。下面我们引述 Widom 与 Kadanoff 采用作用量表示所作的重正化群分析。

设 Devagelaere 映象

$$x=y+f(x) \tag{4.4.16A}$$

$$y'=-x+f(x') \tag{4.4.16B}$$

的作用量为 A_0,由作用量的定义

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_0(x,x')}{\partial x}&=-y=f(x)-x'\\ \frac{\partial A_0(x,x')}{\partial x'}&=y'=f(x')-x\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

因此 A_0 可以写作:

$$A_0(x,x')=-xx'+G(x)+G(x') \tag{4.4.18}$$

式中$\dfrac{\partial G(x)}{\partial x}=f(x)$,$A_0(x,x')$对于 x 与 x'是对称的,因此其组合作用量具有同样的对称性。与映象 T 的重正化算符对应的作用量的重正化算符可以定义为

$$RA(x,x')\equiv\alpha\beta\{A(\frac{x}{\alpha},\frac{z}{\alpha})+A(\frac{z}{\alpha},\frac{x'}{\alpha})\} \tag{4.4.19}$$

z 由极值条件$\dfrac{\partial}{\partial z}\{A(x,z)+A(z,x')\}=0$ 确定。R 的不动点方程

$$RA(x,x')=A(x,x') \tag{4.4.20}$$

确定 α,β,求解该式可对 $A(x,x')$展开。利用其展开式 $A(x,x')=\sum\limits_{i,j}A_{ij}x^ix'^j$,使等式 $RA(x,x')=A(x,x')$ 在 xx'的离散点$(-1,-0.8,\cdots,0.8,1)$上成立。如选 $A_{00}=A_{10}=A_{01}=0$,应该引入坐标位移 u_0,不动点方程可改写作

$$A^*(x,x')=\alpha\beta\{A^*(u_0+\frac{x}{\alpha},u_0+\frac{z}{\alpha})+A^*(u_0+\frac{z}{\alpha},u_0+\frac{x'}{\alpha})\} \tag{4.4.21}$$

A_{ij}为对称矩阵，$A_{ij}=A_{ji}$。该式的求解是不困难的，只要确定 u_0，α，β，就可得到 A_{ij}阵中每一元素的数值解。

R 的线性化算符的本征值问题为

$$\alpha\beta\{P(\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha})+P(\frac{z}{\alpha},\frac{x'}{\alpha})\}=\lambda P(x,x') \qquad (4.4.22)$$

λ 为本征值，z 仍由不动点方程改写形式来确定。那么由此可得到几个本征值：其一是对应于平庸解 $P(x,x')$=常数的最大本征值；其二是对应于保面积映象倍周期分叉的参数收敛的本征值；其三是与本征函数

$$P_N=x^N\frac{\partial A^*(x,x')}{\partial x}+x'^N\frac{\partial A^*(x,x')}{\partial x} \qquad (4.4.23)$$

相应的本征值为 $\lambda_N=\alpha^{1-N}$，其中 $\lambda_0=\alpha$ 为相关本征值。最后是与 $P(x,x')=x-x'$对应的本征值 $\lambda=\beta$。$P(x,x')=x-x'$破坏了 A 的对称性 $A(x,x')=A(x,x')$。

三、作用空间的扩散

当 $k>>k_\infty$时，再去研究相空间中的轨道分布成为没有意义的了，我们期望寻找一种统计描述。在实际问题中，往往更关心 J 的值。例如，在宇宙线的 Fermi 加速中，认为带电粒子与无规运动电磁场反复碰撞的结果得到了加速。这是一个速度空间的扩散问题。在这类的问题中，θ 作为相位，我们只关心 θ(modl)值，它可以看成在(0,1)内均匀分布的随机数。而对于 J，我们更关心的是 J^2 的增益。

考察标准映象

$$I_{n+1}=I_n+K\sin\theta_n$$
$$\theta_{n+1}=\theta_n+I_{n+1} \qquad (4.4.24)$$

当 $k>>1$ 时，可以认为轨道点的分布函数 $P(I,\theta,n)$与 θ 无关，$P(I,\theta,n)=P(I,n)$，并可把作用空间的发展作为 Mapkob 过程处理：

$$P(I,n+\Delta n)=\int P(I-\Delta I,n)W(I-\Delta I,n,\Delta I,\Delta n)\mathrm{d}(\Delta I) \qquad (4.4.25)$$

W 为 $I-\Delta I$ 至 I 的跃迁概率。对于 $P(I,n)$，在其发展的满足条件 $\left|P^{-1}\frac{dP}{dI}\Delta I\right| << 1$ 的阶段，可以把前式的右边对 ΔI 展开至二级。注意到归一性，$\int W(I,n,\Delta I,\Delta n)d(\Delta I) =$ 得 Focker Plank 方程：

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial I}(FP) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I^2}(DP) \tag{4.4.26}$$

式中 F 为摩擦系数：

$$F(I) = \frac{1}{\Delta n}\int \Delta I W(I,n,\Delta I,\Delta n)d(\Delta I) \tag{4.4.27}$$

D 为扩散系数

$$D(I) = \frac{1}{\Delta n}\int (\Delta I)^2 W(I,n,\Delta I,\Delta n)d(\Delta I) \tag{4.4.28}$$

ЛАНДАУ 证明：对于 Hamilton

$$F = \frac{1}{2}\frac{dD}{dI} \tag{4.4.29}$$

它使 Focker-Plank 方程变成扩散方程

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{D}{2} - \frac{\partial P}{\partial I}\right) \tag{4.4.30}$$

对于标准映象式的扩散方程常写作：

$$\frac{\partial P}{\partial n} = D\frac{\partial^2 P}{\partial I^2} \tag{4.4.31}$$

此时 $k >> 1, \Delta n = 1, < \Delta I_1 > = 0, < (\Delta I_1)^2 > = D$。通常用的扩散系数的修正结果为

$$D = \frac{K^2}{2}\left[\frac{1}{2} - J_2(K)\right] \tag{4.4.32}$$

第五节 Melnikov 方法

Melnikov 方法是判定 Smale 马蹄下混沌存在的非常有效的解析方法，当然从目前研究状况来看，这种解析方法还不能从理论上解决奇怪吸引子的问题。但是，Melnikov 方法的核心思想还是值得一提的，它是把所讨论的系统归结为一个二维映射系统，然后推导该二维映射存在横截同宿点的数学条件，从而进一步证实了映

射是具有Smale马蹄意义下的混沌。这个方法的优点是可以用解析的方法去计算一系列数学结果，较容易地系统地分析研究对象。近年来发展起来的两分法是Melnikov方法在高维情况下的推广，但还仅限于数学理论分析阶段，还未真正地为处理理论力学等问题服务。

另一方面，从目前的物理学和力学的研究状况看，其中许多问题可以归结为讨论带有弱周期扰动项的具有同宿轨道或异宿圈的二阶常微分方程和具有鞍焦型同宿轨道的三阶常微分方程。对于这两类系统，利用一定的数学技巧，就可以建立二维Poicaré映射。显然Melnikov方法就可以在此发挥其作用。按照动力学系统理论，如果一个平面映射存在Smale马蹄变换，这个映射就具有反映属性的不变集。因而，我们通常认为，可以用Melnikov方法去判定系统是否具有马蹄变换意义下的混沌。如果是二阶常微分方程具有一簇周期轨道，那么该系统受到小摄动后，Melnikov方法就可以用来判定次谐分叉轨道的存在。

近10年来，Melnikov方法运用及理论研究都有一定发展。其中有高阶Melnikov方法的建立并运用到超次谐分叉轨道；用Melnikov方法研究多自由度Hamilton系统的动力学行为；还有一些与平均法结合处理特殊系统的有效手段等。我们在下面几节中将有选择地介绍Melnikov方法的运用。

一、Melnikov方法：平面同宿轨道的摄动[13][14]

平面Hamilton系统我们前面已经提及，在此我们再作适当的归纳。

对于一个平面Hamilton系统：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u} \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

其中$H=H(u,v)$称Hamilton函数或Hamilton量。这些系统一般具有如下性质：

(1) 任何有限远的奇点是中心、鞍点或退化鞍点；

(2) 在中心奇点周围，存在一簇周期轨道，并填满了相平面上的某一区域。该区域可以扩充到无穷远处也可以以连结鞍点的轨线为其边界，其中一种常称为同宿轨道，另一种称为异宿轨道；

(3) 满足 Liouville 定理

下面我们用一个例子来阐明相空间中的等能线的求取，例如系统形式如下：

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \tag{4.5.2}$$

即 $\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x)$ 记 $G(x) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi$，则上式的 Hamilton 量为

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) = h \tag{4.5.3}$$

从数学上看这是一个简单的积分。而其物理意义是运动能的守恒，即质点动能 $(1/2)y^2$ 与外力对质点所作功的负值 $G(x)$ 之和为一能量常数 h。

对于给定的能量 h，由 $H(x,y) = h$ 可以得到 $y = \pm\sqrt{2(h - G(x))}$，因而相平面上两轨线必定满足 $h \geqslant G(x)$。根据这一特殊情况，我们可以容易按 $G(x)$ 的变动勾划出 (x,y) 上的轨线。其中较典型的两种相图如图 4-10 所示，这是用同宿轨线分离不同的周期轨道的形式。此时的 $G(x)$ 满足的曲线图形如图 4-11，它是用同宿轨道分离周期与非周期的形式。此时 $G(x)$ 满足的曲线图形如图 4 12。图 4-10 等的图形包括未画出的其他情形都具有两个特点：奇点位于 $y = 0$ 上，相线关于 x 轴对称。

接下来我们就要讨论同宿轨道的摄动情况，并阐明如何用 Melnikov 函数来表述同宿轨道及其变动的情况。先来考察一个有扰动的平面 Hamilton 系统：

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t), x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R^2 \tag{4.5.4}$$

其中 $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, g(x,t) = \begin{bmatrix} g_1(x,t) \\ g_2(x,t) \end{bmatrix}$ 是充分光滑的函数，且

在有界集上为有界。$g(x,t)$ 是 t 的周期函数，周期为 T。并且对这系统要有几点假设，为避免过于详细的数学表达，我们综合地假设具备一条连结双曲鞍点的周期轨道。当 $\epsilon=0$ 时，其相图就类似于图 4-13。

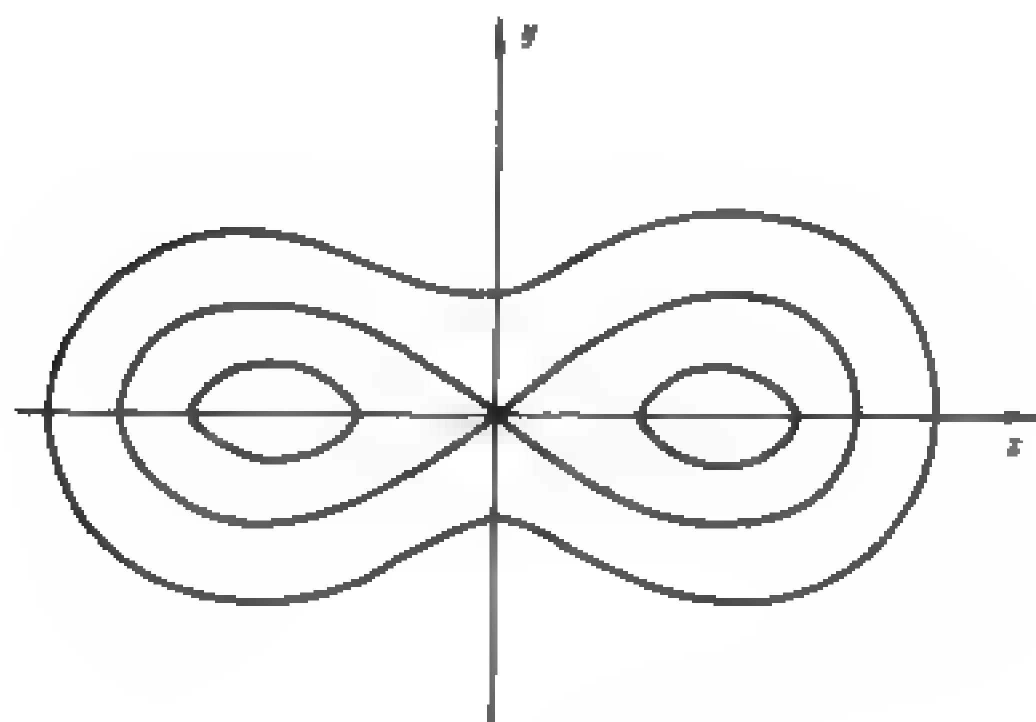


图 4-10

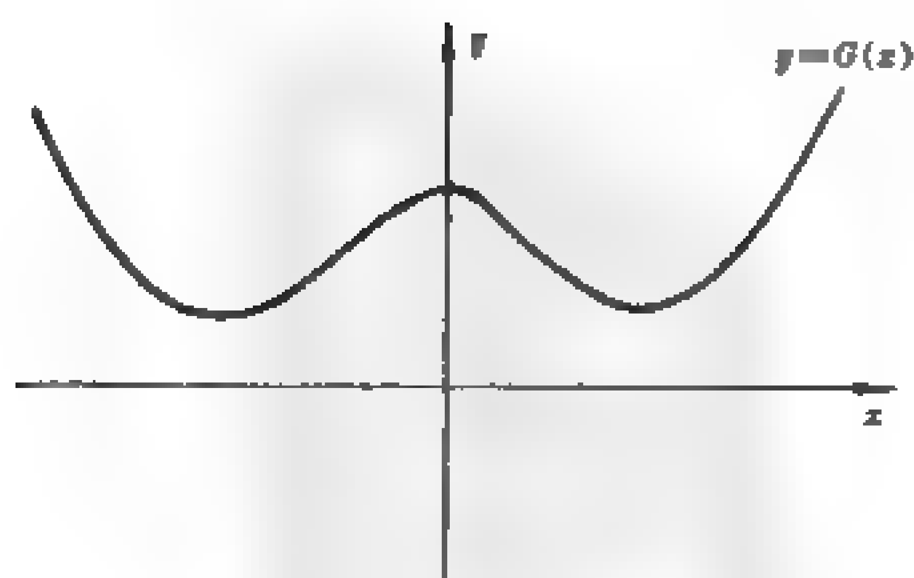


图 4-11

为了研究问题需要，即要构筑 · Poincaré 截面，我们往往将上

述系统转化到一个等价的扭扩系统：

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(x,\theta) \\ \dot{\theta}=1\end{cases} \qquad (x,\theta)\in R^2\cdot S^1 \qquad (4.5.5)$$

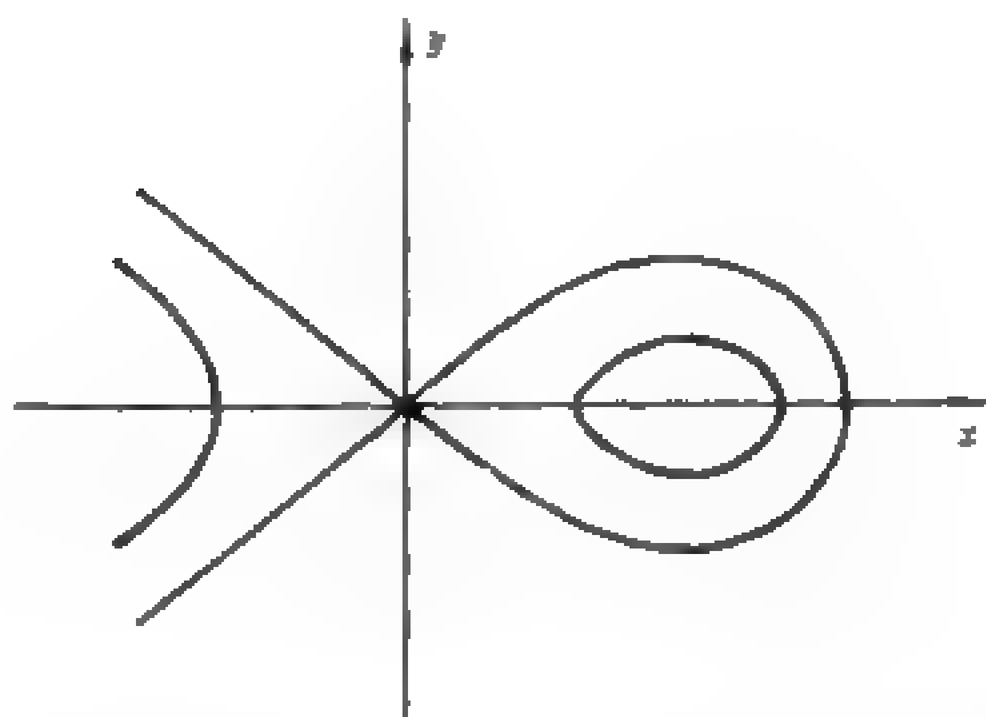


图 4-12

其中 S^1 表示周长为 T 的圆。由此就可定义 Poincaré 截面：

$$\Sigma^{t_0}\{(x,\theta)\in R^2\cdot S^1|\theta=t_0\in[0,T]\} \qquad (4.5.6)$$

和 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0}:\Sigma^{t_0}\to\Sigma^{t_0}$

显然，系统的 T 周期解就相当于 $P_\varepsilon^{t_0}$ 不动点，周期 mT 解相当于 $P_\varepsilon^{t_0}$ 的周期 m 点。自然而然地会考虑将原来所讨论的系统通过这种对应关系而转为讨论比原系统降低一维的 Poincaré 映射。数学上已经证明这是一种合适的想法。因而我们只要能找到 $P_\varepsilon^{t_0}$ 的横截同宿点，就意味 Smale 马蹄下的混沌的存在。为此我们必须先讨论一下 $P_\varepsilon^{t_0}$ 的鞍点存在性问题和过鞍点的稳定流形和不稳定流形。只要符合我们前面提及的假设要求，那么在 ε 足够小的前提下 $r_\varepsilon^0(t)=P_0+o(\varepsilon)$ 是原系统唯一的双曲轨道 $P_\varepsilon^{t_0}=P_0+P(\varepsilon)$。并且扰动后的局部稳定流形和局部不稳定流形连续可微地接近于未扰系统的同宿轨道，如图 4-14 所示。

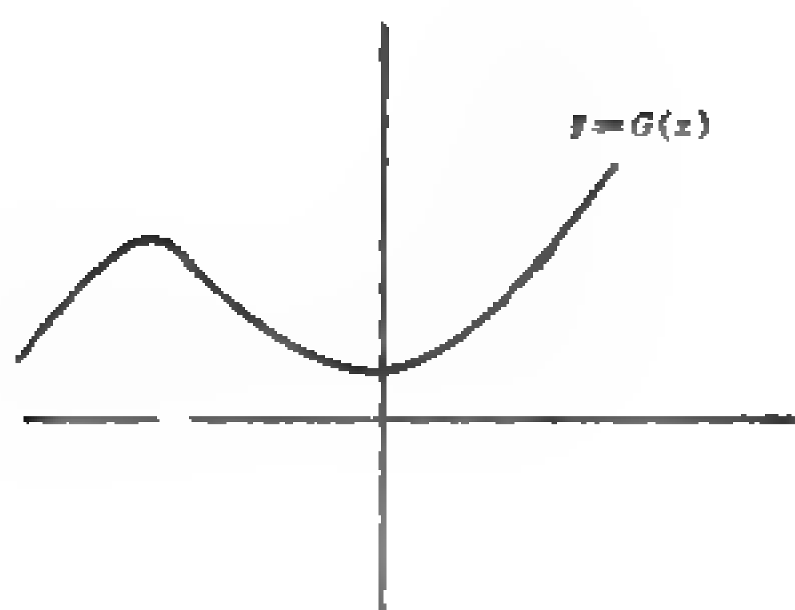


图 4-13

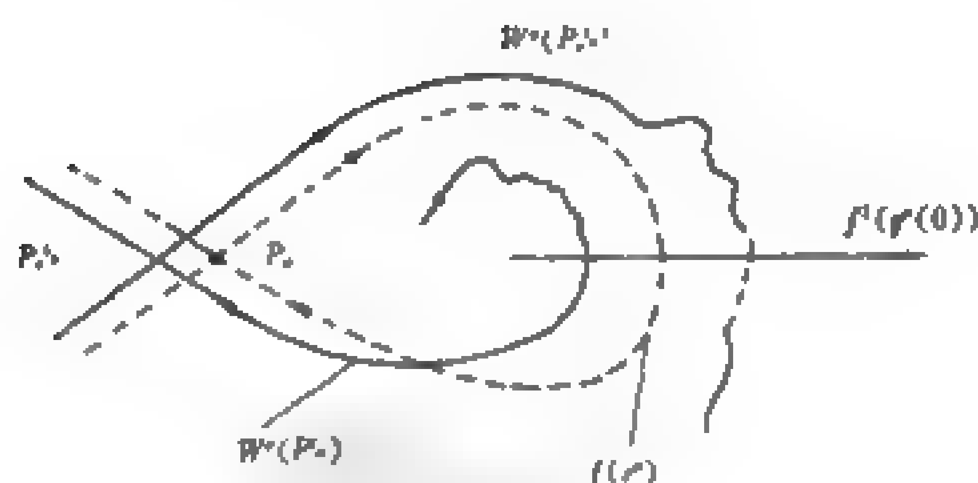


图 4-14

接下来的关键问题是稳定流形和不稳定流形之间的关系。如果说是横截相交就意味着混沌的出现。这就必须借助于距离的概念。我们要在未扰系统的 $q^0(0)$ 处的法向量 $f^\perp(q^0(0))$ 上计算稳定流形与不稳定流形的与它的交点之间的距离。假定这两点的交点为 $q_\varepsilon^u(t_0)$, $q_\varepsilon^s(t_0)$，那么距离函数可定义为

$$d(t_0)=\frac{f(q^0(0))\wedge(q_\varepsilon^s(t_0)-q_\varepsilon^u(t_0))}{|f(q^0(0))|} \tag{4.5.7}$$

再引入两个关于时间 t 的函数

$$\begin{cases}\Delta^s(t,t_0)=f(q^0(t-t_0))\wedge q_1^s(t,t_0)\\ \Delta^u(t,t_0)=f(q^0(t-t_0))\wedge q_1^u(t,t_0)\end{cases} \tag{4.5.8}$$

并对 $q_\varepsilon^u(t,t_0)$，与作一致有效渐近展开，同时对 $\Delta^s\Delta^u$ 求导，距离函数的表达式为：

$$d(t_0)=\varepsilon\frac{\int_{-\infty}^{\infty}f(q^0(0))\wedge(q_\varepsilon^s(t_0)-q_\varepsilon^u(t_0)\mathrm{d}t}{|f(q^0(0))|}+O(\varepsilon^2) \tag{4.5.9}$$

这样可以定义同宿轨道的 Melnikov 函数：

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(q^0(t-t_0))\wedge g(q^0(t_1-t_0),t)\mathrm{d}t \tag{4.5.10}$$

由于 $|(f(q^0(0))|=O(1)$，因而 $M(t_0)$ 是刻划 $d(t_0)$ 的一个好测度。因此 $q^0(0)$ 在 Σ^0 上的位置不变会导致 $f^\varepsilon(q_0^0(0))$ 的不变。当变化时，$M(t_0)$ 也随之变化，如果 $M(t_0)$ 存在不依赖于 ε 的零点，就可确保对于充分小的 ε，使 $t_0=\tau$ 时，$q_\varepsilon^s(\tau)=q_\varepsilon^u(\tau)$ 也就是说 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0}$ 存在同宿点。事实上对于任意 $t_{0\in(0,T]}$，Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0}$ 都存在同宿点。如果进一步，要求 $M(t_0)$ 具有简单零点，就可以保证 Σ^{t_0} 上 $P_\varepsilon^{t_0}$ 的稳定流形与不稳定流形是横截相交。假定 $M(t_0)$ 有两次零点，稳定流形与不稳定流形具有两次同宿相切的现象。这些结论有严格的数学保证。据此也可以导出一系列的混沌参数区域。Melnikov 函数还有几种类型，如具有异宿环的平面 Hamilton 系统的 Melnikov 函数，平面非 Hamilton 系统的 Melnikov 函数在此书内我们不作详述，有兴趣的读者可以参阅相关书籍。我们再来探讨一下 Melnikov 函数的物理意义。以单自由度的力学系统为例，系统的解析式为 $\ddot{x}+f(x)=-\varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon g(t)$，当 $\varepsilon=0$ 时，它是一个 Hamilton 系统，质点将在等能曲线上运动；当 $-\varepsilon h(x,\dot{x})$ 代表质点所受到的阻尼力，$\varepsilon g(t)$ 为质点受到的外加周期强迫力。如

果 $\varepsilon=0$ 时,上面自由度系统存在一条连结双曲鞍点的同宿轨道,对充分小的 ε,其 Melnikov 函数 ε 倍为

$$\varepsilon M(t_0)=-\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}h(x_0(t),\dot{x}_0(t))\mathrm{d}x_0(t)+\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)g(t+t_0)\mathrm{d}t \tag{4.5.11}$$

其中 $(x_0(t),\dot{x}_0(t))$ 代表 $\varepsilon=0$ 时同宿轨道的表达式。$\varepsilon M(t_0)$ 表达式中第一项是以 t_0 所处位置为出发点外力沿同宿轨道所做的功。所谓 $M(t_0)$ 的简单零点就要求合功(总功)为0,即出发点 $(x,\dot{x})$ 为能量守恒点。由于同宿轨道上点与双曲鞍点取同一能量值,等于 $(x,\dot{x})$ 点处的能量值。再则,以 t_0 为初始时刻,由 $(x,\dot{x})$ 附近位于同宿轨道上的点出发,所做总功单调变化,也就是说,以 t_0 为同一初始时刻,在 $(x,\dot{x})$ 附近能量变化是单调的。

当 $\varepsilon=0$ 时,所有同宿轨道上的点与双曲鞍点取同一能量值,构成数条等能曲线;当 $\varepsilon\neq0$ 时,就不能保证所有同宿轨道上的点仍保持与双曲鞍点取同一值,只有满足 $M(t_0)=0$,那些点才有可能做到这一点。同样道理在 $\varepsilon=0$ 时位于同宿轨道充分接近的那些轨线上的点其能量不会与双曲鞍点取同样的能量值。但当 $\varepsilon\neq0$ 时,这些轨线上的一些点的能量如同宿轨线上一些点那样也发生变化,不能排除这些点的能量变化后达到了与双曲鞍点能量相同。这些点与 $M(t_0)=0$ 的点构成一个考虑阻尼与外力作用后的新的能量平衡集合,这些集合可能与系统的混沌性质有关。

二、映射系统的 Melnikov 方法

Melnikov 方法通常是用来研究微分方程系统所描述的动力学行为。在一定的条件下,可以把这个方法推广到处理映射系统。

考虑一簇平面上的微分同胚

$$M_\varepsilon: x\to F(x)+\varepsilon G(x) \tag{4.5.12}$$

其中,F,G 是 $R^2\to R^2$ 的连续可微的函数,$\varepsilon\in R$。假定未扰系统($\varepsilon=0$)$x\to F(x)$ 存在一鞍点 P_0 且 P_0 的稳定流形 $W^s(P_0)$ 的一支与它的不稳定流形 $W^u(P_0)$ 的一支相重合。对于充分小的 ε,映射 M_ε 也有一个双曲鞍点 P_ε,它是与 P_0 充分接近的,同时,P_ε 的局部稳

定流形$_{loc}^s(P_\varepsilon)$和局部不稳定流形$_{loc}^u(P_\varepsilon)$也是与P_0的局部稳定流形和局部不稳定流形充分接近的。我们在$W^u(P_0)=W^s(P_0)$上任取一点x_0，以v_0表示过x_0与该流形相切的矢量。同时，以$x_0^u(\varepsilon)$和$x_0^s(\varepsilon)$分别表示$W^u(\varepsilon)=W^s(\varepsilon)$与$v_0$的法向的第一交点。如图4-14。类似于Meknikov方法对连续系统的处理，定义如下函数：

$$\begin{cases}\Delta^u(\varepsilon)=(x_0^u(\varepsilon)-x_0)\wedge v_0\\ \Delta^s(\varepsilon)=(x_0^s(\varepsilon)-x_0)\wedge v_0\\ \Delta(\varepsilon)=\Delta^u(\varepsilon)-\Delta^s(\varepsilon)\end{cases}\tag{4.5.13}$$

再结合M_ε的微分同胚式，可以得到一个递推式：

$$x_{k+1}^u(\varepsilon)=F(x_k^u(\varepsilon))+\varepsilon G(x_k^u(\varepsilon))\tag{4.5.14}$$

然后我们可通过一定数理运算，最终导出：

$$\frac{d\Delta^u(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|DF^k(x_k)|G(kx_{k-1})\wedge v_k\tag{4.5.15}$$

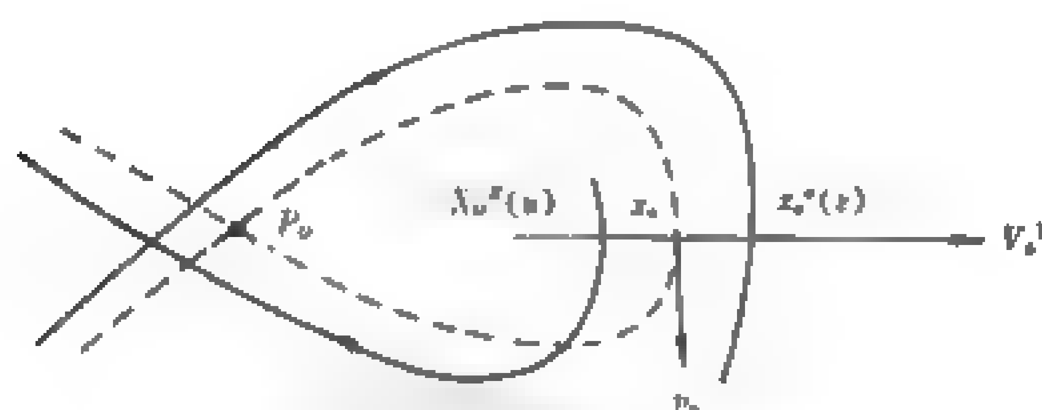


图 4-15

同样对稳定流形在$\varepsilon=0$处的局部行为也可表达为：

$$\frac{d\Delta^s(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=-\sum_{k=1}^{\infty}|DF^{k}(x_k)|G(kx_{k-1})\wedge v_k\tag{4.5.16}$$

把这两个式子联合起来就能得到刻划$\varepsilon=0$处，稳定流形与不稳定流形的局部行为。其解析式为

$$\Delta'(0)\frac{d\Delta^u(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|DF^{k}(x_k)|G(kx_{k-1})\wedge v_k\tag{4.5.17}$$

如果 F 为保面积映射，有 $|DF^k(x)| = 1$，所以上式可简化为

$$\Delta'(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(kx_{k-1}) \wedge v_k \tag{4.5.18}$$

那么这两式就是判别映射系统是否存在横截同宿点的 Melnikov 函数。其中 $DF^k(x_k)$ 的本征值是决定不动点性态的，倘若是两维情形，它的两个本征值应满足 $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$，这样才能保证不动点的鞍点性态。

对映射的讨论同样可以推广到三维映射系统，如

$$M_\epsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F(x,z) + \epsilon G(x,z) \\ z + \epsilon H(x,z) \end{pmatrix} \tag{4.5.19}$$

它的处理思想与低维类似，首先需要考虑 $\epsilon = 0$ 时的动力行为，确定同宿轨线的存在，然后再考察稳定流形和不稳定流形的摄动后的行为，最终通过对距离函数的数理处理获取相应的 Melnikov 函数。

有兴趣的读者可将下面简要列出的 McMillan 的保面积映射及其修正作为例子去进一步认识映射系统的 Melnikov 函数的求取。

McMillan 保面积映射可表示如下：

$$x_{n+1} = y_n$$

$$x_{n+1} = -x_n + f(y) \tag{4.5.20}$$

它的 Melnikov 函数为：

$$M(t,r,\beta) = r\sigma_1(t) + \beta\sigma_2(t) \tag{4.5.21}$$

其中

$$\sigma_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(x_{n+1}x_n^2 + x_{n+1} - \mu x_n)$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(y_{n+1}x_{n+1}^2 + y_{n+1} - \mu x_{n+1}) \tag{4.5.22}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{n+1}^2 - \mu x_n x_{n+1})$$

当然也可以进一步作参数变换，表示成常见的第一、第二椭圆积分形式。

McMillan 的修正映射可以作为一高维的映射系统例子，其表

达形式为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n + \dfrac{2\mu(z_n)y_n}{1+y_n^2} + \epsilon(ry_n + \beta x_n) \\ z_{n+1} = z_n + \epsilon h \end{cases} \tag{4.5.23}$$

它的 Melnikov 函数为，

$$M(t,z,r,\beta) = r\sigma_1(t,z) + \beta\sigma_2(t,z) + M_2(t,z) \tag{4.5.24}$$

其中 $\sigma_1(t,z)$ 和 $\sigma_2(t,z)$ 与低维情形类似，$M_2(t,z)$ 的表达式为

$$M_2(t,z) = \mu(z)sh(\omega)[\omega - K(k)E(am(\frac{2K(k)t}{\omega})) + K(k)E(am(\frac{2K(k)t}{\omega} - \pi)) - 2K(k)E(k)]h \tag{4.5.25}$$

三、次谐波轨道的存在和稳定性

前面已提及，Melnikov 函数最适合处理单自由度系统。我们先来看一下其一般形式：

$$\ddot{x} + g(x) = -h(x,\dot{x})\dot{x} + f(t) \tag{4.5.26}$$

其中 $f(t)$ 代表外加周期强迫力，满足 $f(t+T) = f(t)$，$-h(x,\dot{x})\dot{x}$ 代表阻尼力，假定在外力 $f(t)$ 作用下方程产生一个周期为 T_1 的解，那么 $x(t)$ 与 $x(t+nT_1)$ 满足方程：

$$\ddot{x}(t) + g(x(t)) = -h(x(t),\dot{x}(t))\dot{x}(t) + f(t)$$

$$\ddot{x}(t+nT_1) + g(x(t+nT_1)) = -h(x(t+nT_1),\dot{x}(t+nT_1))\dot{x}(t+nT_1) + f(t+nT_1) \tag{4.5.27}$$

由此可以推出，$f(t) = f(t+nT_1)$。显然一定存在一个正整数 m，使得 $mT = nT_1$，即 $T_1 = (m/n)T$。在力学上，一般定义 $T_1 = mT$ 的周期解为次谐共振解，$T_1 = (m/n)T$ 的周期解为超次谐共振解。这两类解对描述系统的性质至关重要。我们再来讨论一下更一般的情形：

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R^2 \tag{4.5.28}$$

其中函数要求与单自由度系统一样。由于 $\varepsilon = 0$ 时它存在一簇以 α 为参数的周期轨道，对于 ε 充分小的情况，可以假想它的次谐解和超次谐周期解可由 $\varepsilon = 0$ 时满足 $T_\alpha = mT$ 和 $T_\alpha = (m/n)T$ 和轨道在小扰动下生成。因此我们必须考察满足 $T_\alpha = (m/n)T$ 的轨道 $q^\alpha(t)$ 在 ε 小扰动下的生成解 $q^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$。与前面处理同宿轨道摄动一样，它可作一致渐近展开：

$$q^\alpha_\varepsilon(t,t_0) = q^\alpha(t - t_0) + \varepsilon q^\alpha_1(t,t_0) + O(\varepsilon^2) \tag{4.5.29}$$

就是 $q^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$ 在 $t \in [t_0, t_0 + T]$ 内是一致有效的渐近展开。从理论上讲，$q^\alpha_1(t,t_0)$ 未必是 t 的周期函数。因而对应的 Poincaré 映射 $P^{t_0}_\varepsilon$ 不能保证存在有对应于生成解 $q^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$ 的周期点。只有在一定的条件下，$q^\alpha_1(t,t_0)$ 的周期性成立，同时保证 Poincaré 映射 $P^{t_0}_\varepsilon$ 存在有对应的周期点，这些正是我们试图解决的问题。由与处理同宿轨道的 Melnikov 函数分析和计算，可以得到：

$$\begin{aligned} &f(q^\alpha(0)) \wedge (q^\alpha_\varepsilon(t_0 + mT, t_0) - q^\alpha_\varepsilon(t,t_0)) \\ &\quad = \varepsilon M^{m/n}(t_0) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{4.5.30}$$

其中 $M^{m/n} = \int_0^{mT} F(q^\alpha(t)) \wedge g(q^\alpha(t), t + t_0)\mathrm{d}t$ 为 $T_\alpha = (m/n)T$ 次谐或超次谐轨道的 Melnikov 函数。

如果 $M^{m/n}(t_0)$ 存在零点，由前面的分析，存在扰动轨道 $q^\alpha_\varepsilon(t, t_0)$，$q^\alpha_\varepsilon(t,t_0)$ 出发，再次返回至 Σ^{t_0} 交于 $q^\alpha_\varepsilon(t_0 + mT, t_0)$，向量 $q^\alpha_\varepsilon(t_0 + mT, t_0) - q^\alpha_\varepsilon(t,t_0) \subset \Sigma^{t_0}$ 并与 $f(q^\alpha(0))$ 在 $O(\varepsilon)$ 定义下平行。对充分接近于 α 的 β，可定义

$$M^\beta(t_0) = \int_0^{mT} f(q^\beta(t)) \wedge g(q^\beta(t), t + t_0)\mathrm{d}t \tag{4.5.31}$$

它也是光滑依赖 β 的。由于周期轨道簇的周期随参数单调变化的特点，假定有 $\beta_1 < \alpha < \beta_2$ 不等式成立，那么轨线运行就会出现图 4-16 情况。其中 $q^{\beta_i}_\varepsilon(t_0 + mT, t_0) - q^{\beta_i}_\varepsilon(t,t_0) \subset \Sigma^{t_0}$，同时近似地平行于 $f^{\beta_i}(0)$，注意这两个向量的指向正好相反，于是存在一条由 $q^{\beta_2}_\varepsilon(t_0,t_0)$ 与 $q^{\beta_1}_\varepsilon(t_0,t_0)$ 的连线，使它在一定次数的 $P^{t_0}_\varepsilon$ 迭代下回到

Σ^{t_0}，因此映射 $P_\varepsilon^{t_0}$ 在 $q^\alpha(0)$ 附近存在 $O(\varepsilon)$ 意义下的不动点。如果需要从数学上严格证明 $P_\varepsilon^{t_0}$ 存在不动点，就要求零点为简单零点。于是有以下两个结论：

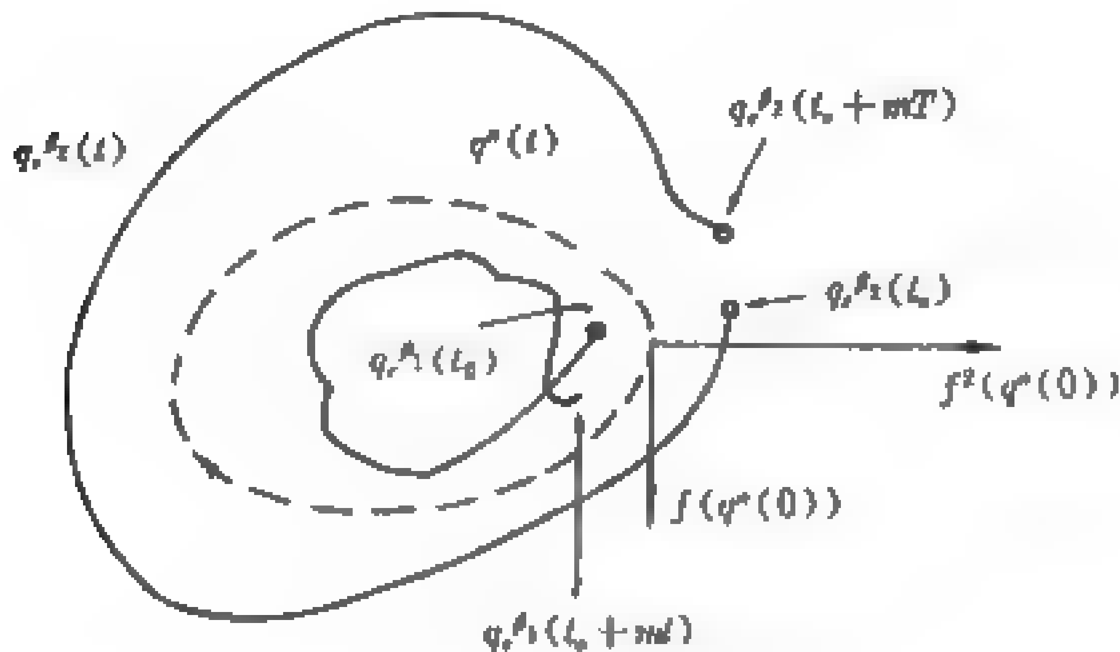


图 4-16

(1) 如果 $M^{m/n}(t_0)$ 在 $t_0 \in [0,T]$ 中存在不依赖于 ε 的简单零点，且 $\frac{dT_\alpha}{dh_\alpha} \neq 0$ 那么只要 $\varepsilon(n)$ 充分小，系统所对应的 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0}$ 存在周期点；

(2) 如果 $M^{m/n}(t_0,\mu)$ 在 $t_0 = \tau,\mu = \mu_0$ 时有二阶零点，那么参数值 $\mu_{m/n} = \mu_0 + O(\varepsilon)$ 是周期轨道出现鞍结点分叉的参数值。

Melnikov 方法在判定上述系统次谐轨道存在性时有较理想的作用，但是不能决定该轨道的稳定性。

下面我们就稳定性问题作一简单的讨论。

首先，我们考虑平面 Hamilton 系统，

$$
\begin{aligned}
\dot{\mu} &= f_1(\mu,v) = \partial H/\partial v \\
\dot{v} &= f_2(\mu,v) = -\partial H/\partial u
\end{aligned}
\tag{4.5.32}
$$

其中 $H(\mu,v)$ 为 Hamilton 时，假定该系统存在一簇围绕 $(0,0)$ 的闭轨 $q^\alpha(t)$，满足 $H(q^\alpha(t)) = h_\alpha$。对此作一作用角变换：

$$I = I(\mu,v) = \oint_{\Gamma} v(\mu,h) f \mu$$
$$\theta = \theta(\mu,v) = 2\pi \frac{\psi(\mu,v)}{T(h)} \tag{4.5.33}$$

其中围道积分是沿着 $H(\mu,v)=h$ 的闭轨 Γ 进行的，$T(h)$ 是闭轨周期，$\psi(\mu,v)$ 是由初始点 Γ 到达 (μ,v) 所用的时间，可以证明在这样的变换下，Hamilton 量可化为：

$$H = H(\mu(I,\theta),v(I,\theta)) = H(I) \tag{4.5.34}$$

对应系统也可以转化为：

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{2\pi}{T(I)} \tag{4.5.35}$$

我们进一步讨论系统

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x,t) \tag{4.5.36}$$

同样地可对同宿轨道所围的一簇周期闭轨做作用角变换，然后系统转化为：

$$\begin{cases} \dot{I} = \epsilon(\frac{\partial I}{\partial \mu}g_1 + \frac{\partial I}{\partial v}g_2) \equiv \epsilon F(I,\theta,t) \\ \dot{\theta} = \Omega(I) + \epsilon(\frac{\partial \theta}{\partial \mu}g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial v}g_2) \equiv \Omega(I) + \epsilon G(I,\theta,t) \end{cases} \tag{4.5.37}$$

其中 $\Omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{2\pi}{T}$。

现在考虑满足周期 $(m/n)T$ 以及作用量为 $I^{m,n}$ 的次谐轨道的子扰动，即

$$\begin{cases} I = I^{m,n} + \sqrt{\epsilon}\, h \\ \theta = \Omega(I^{m,n})t + \psi - \frac{2\pi n}{mT} + \psi \equiv \Omega^{m,n} t + \psi \end{cases} \tag{4.5.38}$$

其中 h 和 ψ 表示 $q\alpha^{(m,n)}(t)$ 的扰动。

将它代入原系统并作必要的数学处理并舍去高阶 ϵ 项可得到一个简化平均系统：

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{h}} = \sqrt{\varepsilon}\,\dfrac{1}{2\pi n}M^{m/n}\left(\dfrac{\bar{\psi}}{\Omega^{m/n}}\right) \\
\dot{\bar{\psi}} = \sqrt{\varepsilon}\,\Omega'(I^{m/n})\bar{h}
\end{cases}
\tag{4.5.39}
$$

它也是一个 Hamilton 系统，这类奇点只能是鞍点或中心，如果$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}H}>0$，那么$\dfrac{\partial T}{\partial I}=\dfrac{\partial T}{\partial h}\dfrac{\partial h}{\partial I}=\Omega\dfrac{\partial T}{\partial h}>0$，$\Omega'=-\dfrac{2\pi}{T^2}\dfrac{\partial T}{\partial h}<0$，此时当$\dfrac{\partial(M^{m/n})}{\partial\bar{\psi}}<0$，奇点为鞍点。当$\dfrac{\partial(M^{m/n})}{\partial\bar{\psi}}>0$，奇点为中心。根据平均方法的理论，平均系统的奇点就是相当于原系统的周期轨道，因而用平均系统对奇点的稳定性分析的结论就可以用到原系统周期轨道的稳定性问题上去。对于更高一级ε的平均系统，必须作进一步平均来讨论稳定性问题，有兴趣的读者可进一步查阅有关的参考文献。

四、高阶 Melnikov 方法

在前几节我们给出了具有弱周期扰动的平面 Hamilton 系统的 Melnikov 方法。这个方法为我们建立讨论系统的次谐分叉和 Smale 马蹄变换下混沌的数学判据。利用这套颇为系统的方法还可以讨论一些物理和力学上的典型系统，如 Duffing 系统等，同时我们也发现其中有些缺陷。

其一是用 Melnikov 方法来判定次谐分叉存在性时，只能判定$T_k=mT$的次谐分叉，对于$n\neq 1$的超次谐轨道，都否定了其存在性，这个结果与事实是不相符的。

其二是用 Melnikov 方法判定存在 Smale 马蹄意义下混沌的参数值与出现奇怪吸引子的参数值的数值结果不相符。例如，北京大学力学系 1983 年所做的倒摆实验，经标准化处理后，得到保留立方项的方程为：

$$
\ddot{x}=\varepsilon\delta\dot{x}-x+x^3=\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}a^2x^2\right)f\cos\omega t
\tag{4.5.40}
$$

它的等价系统为

$$
\begin{cases}
\dot{x}=y \\
\dot{y}=x-x^3-\varepsilon\delta y+\varepsilon\left(1-\dfrac{1}{2}a^2x^2\right)f\cos\omega t
\end{cases}
\tag{4.5.41}
$$

当 $\epsilon=0$ 时,Hamilton 量为:

$$H=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4=h \tag{4.5.42}$$

此时相平面上(0,0)为鞍点,(±1,0)为中心。对应于 $h=0$,存在两条连结双曲线鞍点(0,0)的同宿轨道,它们可以表达为含 t 的同宿轨道:

$$\begin{cases}x_{\pm}^0(t)=\pm\sqrt{2}\,\mathrm{sech}t\\ y_{\pm}^0(t)=\mp\sqrt{2}\,\mathrm{sech}t\ \mathrm{th}t\end{cases} \tag{4.5.43}$$

由此可以算出相应的 Melnikov 函数,即

$$\begin{aligned}M(t_0)&=\int_{-\infty}^{\infty}y_{\pm}^0(t)\Big[-\delta y_{\pm}^0(t)+\\ &\quad(1-\frac{1}{2}a^2x_{\pm}^0(t))f\cos\omega(t+t_0)\Big]\mathrm{d}t\\ &=-\frac{4}{3}\delta\pm\sqrt{2}f\frac{\pi\omega(1-\frac{1+\omega^2}{6}a^2)}{\cosh(\frac{\pi\omega}{2})}\sin\omega t_0\end{aligned} \tag{4.5.44}$$

因而产生 Smale 马蹄意义下混沌的参数值可以确定为:

$$R(\omega)=\frac{4\cosh(\pi\omega/2)}{3\sqrt{2}\pi(1-\frac{1+\omega^2}{6}a^2)} \tag{4.5.45}$$

当 $f/\delta>R(\omega)$ 时,就具有了 Smale 马蹄意义下的混沌。但是实验所得结果与这一阈值相距甚远,如图 4-17 阴影部分为实验产生混沌的数值区域。

这说明利用同宿轨道或异宿圈的 Melnikov 函数的简单零点的存在性来判定一个物理或力学系统存在混沌运动还是相当粗糙的。

那么,现在的问题是如何解决该方法的缺陷,而缺陷的原因又是什么呢?我们知道 Melnikov 函数所讨论的系统在 $\epsilon=0$ 是一个 Hamilton 系统且具有一簇周期轨道,因此系统此时具有各种周期的周期解。换句话,它的 Poincaré 映射具有一切 m/n 周期解。如果在这样的系统中加入周期外力不改变系统的 Hamilton 性质,仅仅由可积 Hamilton 系统变成近可积 Hamilton 系统,因而具有无限层

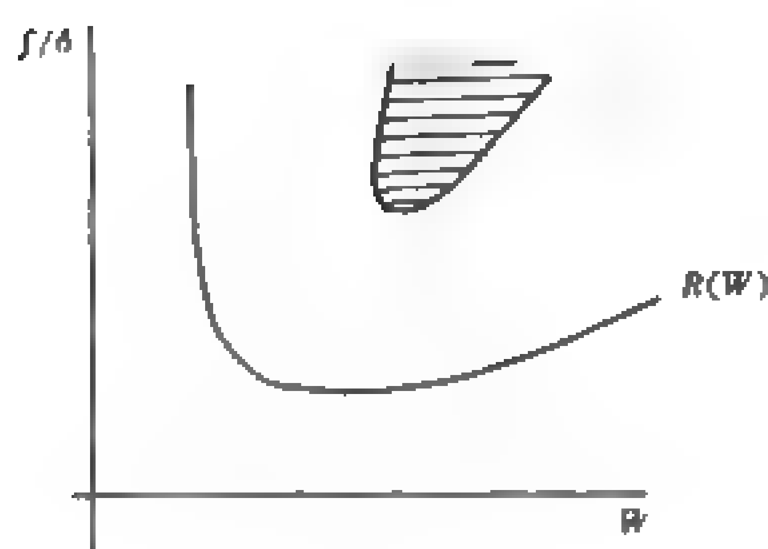


图 4-17

次的周期结构。如果又加入耗散项的话，系统将发生由 Hamilton 系统转化为耗散系统的质的变化。假定耗散项与外力项都是 $O(\epsilon)$ 量级，那么在 $O(1)$ 量级内，系统仍为一 Hamilton 系统，它的 Poincaré 映射的第一层周期结构仍可得到维持，更高层次的周期结构由于耗散作用的影响而遭破坏。如两者具有不同量级，比如耗散项为 $O(\epsilon^2)$ 量级，而外力为 $O(\epsilon)$ 量级，那么在 $O(\epsilon)$ 量级内，系统可视为一个 Hamilton 系统，因而其 Poincaré 映射的第一和第二层次的周期解仍可得到维持更高层次的周期解由于耗散效应而被瓦解。据此我们再来分析一下两个缺陷。

(1) 前面讨论的系统都是耗散项和周期外力为同一 $O(\epsilon)$ 量级情况，所以用 Melnikov 函数判定的次谐分叉轨道在 Poincaré 映射中只能表现出第一层次周期解存在，即有 $T_s = mT$ 的次谐分叉轨道表现为其 Poincaré 映射 m 解，反映更高层次的周期解应当是由 $T_s = (m/n)T$ 的超次谐轨道分叉出来。在现在这样的情况下，它们是不可能存在的。为了分析出这种超次谐分叉轨道，必须分析比周期外力项更高阶项的耗散项的情况。

(2) 实验上得到的产生混沌运动的参数值 f/δ 比判定产生 Smale 马蹄变换意义下的混沌的阈值大这一事实，也是由于 f 的量级比 δ 的量级要高得多。它从另一侧面也告诉我们产生真实混沌运动只考虑第一层次的周期解是不够的，还需要更高层次的周期解。因而我们要刻划出真实混沌必须考察更高层次的周期解问题，即所要考察的系统至少应有以下形式：

$$\ddot{x} + f(x) = -\epsilon^n \delta h(x, \dot{x}) + \epsilon f \cos\omega t \qquad (n > 1) \quad (4.5.46)$$

要分析这样的系统就必须要有高阶 Melnikov 方法。

高阶 Melnikov 方法的思想与低阶情况一致。目的是要考虑稳定流形与不稳定流形的相交性，也就是找出刻划它们之间距离的代数表达式。不同以前的是对系统假设不再限制在双曲鞍点而是要假定双曲周期轨道的存在性。然后在双曲周期轨道上固定一点，考察由此点引出的稳定流形与不稳定流形的相交。当然也是要转化到扭扩系统上去讨论的。具体的 Melnikov 函数的表达式在此就不详述，有兴趣的读者可以参阅其他资料。在这里还有必要强调的是处理高阶 Melnikov 函数时，在计算混沌参数区间一般不强调用数值解，但纯粹用解析分析会遇到同宿流形的可解性问题，一旦同宿流形可解也会发现它不一定能容易得出同宿解的解析表达式。从目前的文献来看，有些学者已经转向纯解析分析，即不考虑同宿解的具体表达式，而只要求证实同宿解可由 t 来表示。然后通过同宿解的有界性和一致性来确定 Smale 马蹄意义下的混沌参数区域。看来这种做法还是可行的，因为 Melnikov 方法本身只能确定大致的混沌参数域，只能说明存在不变集 Λ，使得动力系统在 Λ 上的动力学行为是混沌的，还不能说明 Λ 为奇怪吸引子。所以对存在性问题，可以避免繁琐的计算过程而仅作定性的分析。有关实际系统中反映的混沌运动的奇怪吸引子，仍是当前一个令人感兴趣的重要研究课题。

参 考 文 献

[1] Lorenz E W. (1963). Dterministic non-periodic flow. J. Atomos

Sci. 20,130-141
[2] 陈式刚,映象与混沌,北京:国防工业出版社,1992,216页
[3] Henon MA. two dimensional mapping with a strange attractor. Commun. Math. Phys., 1976,50(1):69-77
[4] 陈式刚,映象与混沌,北京:国防工业出版社,1992,225页
[5] Reichl L E. Amodern course in statistical physics. Austin: University of Texas, 1990
[6] Chirikov B V Auniversal instability of many-dimensional oscillator systems, Phys. Reports, 1979,52(5):265-379
[7] Lichtenberg A J and Lieberman M A., Regular and stochastic motion. New York: Springer-Verlag, 1983
[8] Aronson D G, et al. Commun. Math. Phys. 83(1982):303
[9] Wisdom J. The origin of the Kirkword gaps: a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. Astron. J., 1982,87(3):577-593
[10] BMS. Chaotic orbits and spins in the solar system, Phys. Today, 1985,38(9):17-20
[11] Greene JMA. Method for determining a stachastic transition. J. Math. Phys. 1979,20(6):1183-1201
[12] Feigenbaum MJ. Kananoff L P and Shenker S > J. Quasi-periodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis, Physica 5D(2 + 3):370-386
[13] 刘曾荣,混沌的微扰判据.上海:上海科技教育出版社,1994
[14] 李继彬,混沌与 Melnikov 方法,重庆:重庆大学出版社,1989
[15] 章琪,高维 Duffing 系统中的混沌.上海师大学报,1995,24(2)

第五章　耗散系统中的混沌

耗散系统中的混沌与低维系统有着密切关系，因为耗散而使自由度归并，高维系统可以降为低维系统来研究，这就使对耗散系统中的混沌研究具有了很强的理论意义。但是，人们发现自由度的归并是有一定条件的，而且它仅仅体现了系统运动演化的一种形式。与此相对应的是保守系统中的混沌，它们的自由度不能归并，同时还存在许多不能归并自由度的“真正的多体问题”(80 年代末提出的“自组织的临界态——SOC 问题就是一个代表)。更为重要的是许多实际问题都要考虑高维的情况，这就有必要从理论上对无穷维动力系统中的混沌进行研究。目前，这方面的研究已经成了混沌学的一个热点，人们在这里发现了许多新的现象和问题，也使我们能从更高的角度来看待混沌现象，以致可以把混沌学包容于范围更广的非线性科学和复杂性态科学之中。

在本章中我们着重讨论耗散系统中的混沌，主要涉及耗散、吸引、分叉和普适性等四方面的内容。

第一节　耗散系统

一、耗散系统与保守系统

系统存在于一定的环境之中。系统与环境的关系可以作为对系统进行分类的基本标准。系统与环境的相互作用可以从它们间交换物质、能量、信息的数量和方式中看出。据此，我们可以把所有的系统分为三类：开放系统、封闭系统和孤立系统。开放系统在不断与环境(外界)交换物质、能量、信息中演化发展，产生出各种包括生命现象、社会运动和思维活动等在内的复杂的运动形态。封闭系统仅与外界交换能量，而不交换物质，就像密封的高压锅一样，

其运动演化服从玻尔兹曼有序原理,即"低温有序原理"。当温度上升时,系统内部无序程度增加。当温度下降时系统内有序程度增加,但这种有序性就象晶体的有序性一样,是"死的秩序"。孤立系统则不和外界交换任何物质、能量和信息,它的演化服从热力学第二定理,只有唯一一个演化方向:趋向越来越无序,越来越混乱,越来越均衡。严格地讲,世界上所有的系统都是开放系统,只不过开放的程度各有不同而已。封闭系统和孤立系统是一种理想的或简化的情况,它并不存在于现实世界之中,但对它们的研究有着很强的理论意义,这不仅因为在许多实际情况中,系统与外界的物质、能量、信息交换可以忽略不计,因而基本上服从封闭系统和孤立系统的演化规律,而且它们可以作为一种极限情况,由此展现出三种不同类型的系统演化。不过,物理学关心的是最简单、最基本的情况。根据相对论原理,我们可以把物质和能量等同起来看待,只研究系统与外界的能量交换,这样就可以把系统分为两个大类:耗散系统与保守系统。

耗散系统与保守系统的区别在于该系统中能量是否守恒。如果系统的能量随时间而不断变化,这就是耗散系统;相反,系统的能量不随时间而变化,则称为保守系统。

显然,一个实际的系统,当运动时间足够长时,能量都会发生耗散,也就是说耗散效应是不可避免的,本章我们就来讨论耗散系统中的混沌。

二、耗散结构中的混沌

耗散系统的一个主要特征是相空间中的体积在运动中会不断收缩,从而使不同初始条件下的状态趋于同一个结果,或者少数几个不同的结果。这种情况可以体现为相空间中的一个或几个吸引集——极限集合。吸引子的存在使耗散系统中的混沌与保守系统中的混沌有根本的区别。对耗散系统中的混沌的研究主要是对奇怪吸引子的研究。

耗散系统是一大类系统,还可以进一步从系统的结构及其稳定性来对它进行划分。前面我们提到了两类,一类随着能量的耗

散，温度降低而出现有序结构，例如有序性很强的晶体。这就是一类"死"的次序，它会随着温度的升高或趋向平衡而使有序结构解体。另一类则与此相反，它会因与外界交换物质、能量而保持，甚至发展自己的有序结构。这类系统对生命，对人类有着特殊重大的意义。因为生命和人类，以及人类社会就属于这类系统。这类系统就是 Prigogine 所说的"耗散结构"。

根据 Prigogine 的理论，耗散结构保持自己有序性的秘密在于它在与外界交换物质、能量的同时又可以从外界获取"负熵"。按照热力学中的理解，熵是一种代表系统内部无序程度，即无组织程度的热力学函数，负熵的增加也即无序程度的减少，有序性的增加。所以，获取了负熵也就使系统的有序结构得到了发展。为了解释上述现象，他们引入了负熵流的概念。令 dS 表示系统演化中熵随时间的变化值，它可以分解为两项：

$$dS = dS_i + dS_e \qquad (5.1.1)$$

其中 dS_i 表示由于系统内部的变化而导致的"熵产生"；dS_e 是系统与外界交换的"熵流"。根据热力学第二定理，dS_i 永远大于或等于零；而 dS_e 则可以为正，也可以为负；当 dS_e"负"得足够多时，就有可能抵消系统内部的熵产生，使整个系统的熵变化小于零，也即出现有序性增加的情况[1]。

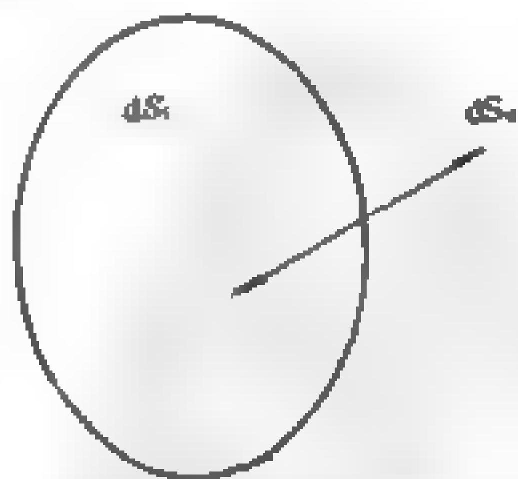


图 5-1　系统的熵

当然，上面的讨论完全是定性的，并且比较简单，但它却表明了在热力学第二定理的"势力范围之外"，系统有出现"有序性增加"的可能性。这就为生命、社会、思维的有序性的存在提供了一

个理论的保证和合理的解释。

让我们回到关于耗散系统中混沌运动的讨论。前面我们已经介绍了生态系统中的混沌现象，心电图、脑电图中的混沌现象，以及社会、思维中的混沌，这些都说明在耗散系统中出现混沌是十分普遍的。但这是不是一种自然的、合乎情理的现象呢？尽管耗散结构的一个基本特性是它能通过耗散来维持自己的组织性，并在一定的条件下发展自己的组织程度，从而提高自己的有序性(自组织)，但它同时又存在着近乎“混乱”的混沌性，二者之间的关系应作如何解释呢？我们在文献[2]中对大脑思维过程中的混沌进行了探讨，提出了一些解释，有兴趣的读者可以作为参考。研究中我们发现，耗散结构和一切复杂系统中的混沌有如下特点：

(1) 由于复杂系统总是分层次的，因此，混沌的发生只是出现在一个特定的层次上，它对上一层次构成了自由选择的基础，又对下一层次提供了一个近似混乱的演化背景。某一层次中的混沌与系统的整体的有序性并不矛盾，相反它却是复杂系统演化发展的必要条件。

(2) 耗散结构系统中混沌的发生与该系统的结构和边界形态有着极大的关系。前者决定了混沌行为的具体性质，后者提供了混沌发生的条件，也决定了它的形式。

(3) 复杂系统中混沌的发生是自组织与他组织相互作用的结果，自组织反映了系统演化的自身规律，而他组织则体现了外部对系统或其他层次对本层次的控制调节。所以，混沌是复杂系统演化中的“正常行为”，只有失去控制的混沌才会威胁整个系统的存在。

第二节　混沌吸引子

耗散系统中 Liouville 定理失效，系统相空间收缩，最终趋向维数比原来相空间低的极限集合。这种运动可以看作是一个“吸引”过程。它意味着随着系统的演化，系统中各个子系统的自由行动将越来越少，而相互间的联系和整体约束将越来越强。然而，这

-过程并不单纯使有序度不断提高，系统往往会经过高级的有序阶段发展到混沌阶段。耗散系统的这种既吸引、又混沌的特征集中地由混沌吸引子体现出来。直到目前为止，混沌学中人们研究得最多、最感兴趣的也正是混沌吸引子(奇怪吸引子或奇异吸引子)。本节我们先从吸引子的一般概念入手，对它们进行分类，然后着重讨论混沌吸引子的特征。

一、吸引子

吸引子的概念，是法国数学家 R. Thom 在他关于突变的论文中首先明确提出的(当然，历史上也有不少数学家和物理学家接触和接近过这个概念，但都没有明确提出)。Thom 指出，结构不稳定的状态总是要趋向稳定才能存在下去。那些相空间中对应着系统结构(指运动方程的结构)稳定的部分(点或区域)，对其他不稳定的“点”有一种“吸附”作用，因此可将结构稳定的部分称为“吸引子”。由此可见，“吸引子”的概念原本是由拓扑学中“结构稳定性”引伸而来的。后来，在对系统长时间演化行为的研究中它又表现出重大的意义，因为，除了发散和解体的结局外，系统的状态总是会趋向一个“终极的状态”。尽管这个状态是否真正存在还有待研究，但在科学史上总是把它和“目的”、“目的论”联系在一起。本世纪70年代以来，德国物理学家 Haken 和我国的著名学者钱学森把不动点和极限环看成是系统运动的目的点和目的环。但是，自1971年，法国物理学家 Ruelle 和 Takens 为耗散系统引入“奇怪吸引子”(Strange attractor)的概念后，人们看到，系统，特别是复杂系统(生命体，人和社会)的目的点更像是奇怪吸引子。从物理、数学和动力系统的角度看，用奇怪吸引子的概念来描述在相空间收缩的同时又出现局部不稳定的情况是再好不过的了。因为它在很大程度上体现了混沌运动的基本特征，所以，现在研究混沌没有不提到奇怪吸引子的。不过在正式引入吸引子的定义之前，我们要对两个与它有关的概念作一些补充和解释。它们一个是“相空间与状态空间”概念，一个是“吸引与吸引子”概念。

1. 关于相空间和状态空间的概念

描述系统演化与运动最有力的工具是相空间和状态空间。在物理学中，相空间有明确的定义。它的维数由质点系的"自由度"个数来决定。由于在真实的三维空间中，一个质点系有 $3N-K$ 个自由度(这里 N 表示组成质点系中的质点数，K 表示质点之间的"约束"条件数)。但为了完整地描述一个质点系的运动状态需要同时考虑它们的坐标和动量，所以通常相空间由广义动量和广义坐标所"张"成，它的维数正好等于质点系"自由度"的两倍，即一个质点系的运动状态需要一个由具有 $2(3N-K)$ 维的相空间才能完全描述。在物理学中相空间的维数总是偶数，但是对于一个系统来说，我们并不受此限制。因为，我们只对系统的某些状态感兴趣，这时的相空间实际上就是控制论中常用的"状态空间"，它的维数可以为偶数也可以为奇数。比如，一个力学家也许对质点系中所有质点的位置和动量有兴趣，那么它的状态空间就等于物理学中的相空间，维数是偶数的。而一个生物学家对一个生物体来说就只对它的"健康状态"有兴趣，而对它由多少质点组成没有兴趣。显然，生物的健康状态仅包括体重、体温、血压等少数几个变量，它的状态空间就只需由这几个"状态变量"或维数来"张"成。以后为了简单起见，我们就把相空间等同于状态空间，对它的维数也不加限制。

从理论上讲，如果我们要对一个系统作全面的考察和描述，至少需要涉及以下几个"空间"[3]：

(1) 相空间或状态空间，这个上面已经说了；

(2) 初值空间，因为不同的初值会导致不同的运动结果，特别是对于混沌运动，它对初始条件极其敏感，初值空间对"极值状态"有极大的影响；

(3) 切空间，它是一个与相空间维数相同的抽象空间，之所以引入它，是因为在许多情况下，仅仅考虑相空间中的轨道是根本不能正确刻划系统演化的极限行为的。为了确切刻划系统演化的极限状态，需要在相空间的每一个点上考察动力学本身的小偏离。从几何学上讲也就是一个与该相点"相切"的状态空间。

(4) 参量空间，通常是指控制参量所"张"成的空间。从协同学

的观点看，控制参量也可以看成是系统的一种“变量”，只不过它比别的变量变化得“慢”一些。

实际研究中我们是很难。对四个空间“面面俱到”的，因为即使一个系统只有两、三个独立变量，考虑上述四个空间，至少也要在 11 维空间中进行“搜索”，这几乎是不可能的。所以，我们通常都需要对问题进行简化，尽量把高维的化为低维，把无穷维的化为有限维。当然，这样做需要很多的经验和很高的技巧，但至少我们需要研究这样做在理论上的可行性。

2. 关于吸引和吸引子的概念

我们这里讲的“吸引”是指系统状态变化的趋向，而不是实际的“吸引力”。系统状态的变化可以从“几何”和“代数”两个方面来描述。用几何方式描述“吸引”或“发散”是针对系统在相空间或状态空间中的变化趋向而言的。用代数的方式描述，则是对系统运动所遵从的微分方程的积分曲线而言的。所以，实际上吸引子对应了微分方程的不动点、极限环、环面及高维环面。这些与微分方程稳定性理论（几何理论）所涉及的内容大致相同。同时，我们知道，微分方程的积分曲线或解的轨线也都是一种几何表示，这使人联想到流体中的“流线”，因此轨线的形状就对应于一定方程的“流形”。对流线或流形拓扑性质的研究，实际上也就是对系统演化规律的研究。

耗散系统演化的基本特点就是趋向一个相对稳定的极限状态。这个极限状态在相空间中表现为一个低维的“小”区域，它就是“吸引子”。对吸引子的研究可以在“微观”和“宏观”两个层次上展开。吸引子的宏观描述是针对“整个”吸引子或系统在状态空间中无穷长轨道的平均值（一些特征量，如 Lyapunov 指数、熵、维数等）而言的。在微观层次上，吸引子的“骨架”与构成它的稳定或不稳定周期的数目有关。

二、吸引子的定义与分类

对系统运动的演化，我们关心的与其说是它的运动状态，不如说是它的“极限”状态或极值行为。为了刻划系统趋向极限状态的

过程。我们需要给出吸引子一个严格定义。而为了对它们进行研究则需要对它们进行分类。

1. 吸引子的数学定义：

吸引子本来就是一个数学概念，这个数学概念对系统趋向某些“极限状态”的演化过程作了精确的动力学描述：

如果一个动力学系统的演化行为可以用微分方程或“映象”的方法进行研究。

我们先考虑一个 N 维一阶微分方程：

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{5.2.1}$$

其中 $X = (x_1, x_2, \cdots x_n)$，$F(X)$ 不明显地依赖于 t。

以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标轴构成系统的相空间，相空间中的一个点代表系统的一个状态，通过相空间中的一个点有唯一的一条积分曲线，一组代表点的运动表现为相空间中的流。通常情况下这些流可以“会聚”，可以“发散”(离开)，也可以相互平行或不断逼近但永不相交。在耗散系统中，由于 Liouville 定理的失效，使得积分曲线，如果存在的话(以后我们将论证，这种情况其实是十分罕见的，不过在我们的微积分书中，只讨论积分曲线存在的情况) 就必定会向相空间中的某些区域会聚。这些区域也就是系统演化的“吸引子”。

用映射的方法同样可以描述系统状态的吸引过程。对于离散系统，映射的方法往往比较方便。我们经常采用的映射是 Poincaré 映射。即在相空间中取一适当的 N-1 维超平面，通常它通过一个不稳定的不动点。当轨道沿一定方向通过 Poincaré 截面时，就在它上面有一个交点。显然，第 $n+1$ 次交点 x_{n+1} 与第 n 次交点 x_n 之间的关系是：

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{5.2.2}$$

也就等于把 x_n 映射到 x_{n+1}。

不难看出，Poincaré 映射方法是对连续过程的一种离散化。当我们只对某些时刻的状态感兴趣时，我们无需每时每刻地跟踪系

统的运动，而只要研究系统运动轨道与Poincaré截面的交点的变化就行了。

在离散系统中吸引子的定义与连续的情况大致相仿，只不过吸引子表现为Poincaré截面上一个“闭的”点集。

下面是Lanfor对吸引子所下的定义：[4]

如果说相空间的一个子集 A 为吸引子，那么 A 必须满足：

(1) A 是闭的不变集。所谓“闭的”是指包含边界上的点，而不变集就是 A 内的点运动仍回到 A 内；

(2) 存在一个 A 的邻域，其中的点在微分方程所确定的“流动”下最终收缩至 A；

(3) A 上的点 x，最终回到 x 的邻域内。

在上面的定义中，吸引子是不可分解的和正测度的。所谓不可分解，是指系统的一个吸引子在演化中不可能被划分开来，成为两个独立的，不相重叠的部分。否则，在吸引的过程中从 A 出发的点就有可能不再回到 A 之中。同时对于不同的新吸引子还需要加以选择，这就需要引进新的控制参量。所谓具有“正测度”是指吸引子的测度必须大于零。这个问题对于吸引子和奇怪吸引子在现实中的存在性是一个基本保证。否则，如果吸引子的测度为零，人们就无法在实际测量中测到它们。当然要完全明了定义的含义，必须有较深的数学基础。但必须强调的是，运用上述定义对吸引子乃至奇怪吸引子的刻划和理解是有帮助的。

根据耗散系统的定义，系统在 N 维相空间中的体积最终将收缩为零，因此吸引子在 N 维空中间体积为零，它只可能存在于比原来相空间的维数低的相空间中，这意味着吸引子使系统的相空间降低了维数。

2. 吸引子的分类

为了研究不同吸引子的共性和特殊性，必须对它们进行分类。通常可以根据吸引子的维数、稳定性和吸引过程来分类。

(1) 按稳定性分类

从数学上讲吸引子是系统相空间中的一个“子空间”，即一个

维数比原来相空间低的区域，它代表了系统的一种“定态”。但数学上的“定态”只是一种特殊的“状态”，而吸引则是一种“过程”，两者并不是等价的。吸引子包含了更为丰富的物理内容。它不仅需要考虑“定态”的存在和它的结构、边界，而且要考虑它附近的一个“邻域”，考虑当系统的初始状态处在该邻域中，而又不“正好”在定态上时系统的运动（演化）情况。显然，这里有两种可能：一种是最终到达这个定态（极限状态），此时该定态称为“吸引子”，该区域称为“吸引域”。另一种情况则相反。只要系统的初始状态与该定态间存在哪怕一点点偏离，在系统以后的运动（演化）中偏离就会越来越大，以致永远离它而去。这样的定态显然不是“吸引子”，而是“排斥子”。不过，排斥子的行为和吸引子的行为完全相反，只要把时间轴“倒过来”就一样了。同时，排斥子也可以看作是沿时间“负”方向泛化的吸引子。

从物理上讲，吸引与排斥的问题和稳定与不稳定的问题有着密切的联系，但又不是完全等同。稳定性的问题仅仅考虑系统在某个状态附近一个小“邻域”中的行为特征，实际上就是考虑系统的状态对扰动引起的偏离的响应。如果偏离能自行缩小，系统就是稳定的，否则就是不稳定的（在数学上对此有专门的研究，我们后面将用到这方面的一些结果）。吸引与排斥的问题则考虑一个大的范围，考虑一个系统在大范围内的运动演化情况。如果是吸引的，这个区域就叫“吸引域”或“吸引盆”。可见，稳定性问题是一个局部问题，而吸引与排斥则是一个全局问题。

(2) 按吸引过程分类[8]

对于一个系统来说，演化最终达到一个什么样的状态固然重要，但有时人们更需要了解它如何到达或通过什么样的途径到达极限状态。这就要研究具体的吸引过程。

同样一个吸引子，吸引的过程可能十分简单，也可能非常复杂。

零维吸引子可以分为焦点、结点和鞍点（双曲不动点）。图 5-2 分别表示了这三种情况：

图 5-2(*A*) 是结点，它的吸引过程最为简单，是直接到达的；

图 5-2(*B*) 是焦点，它的吸引过程是比较复杂，例如需要经过螺旋线地到达；

结点和焦点都各在所有方向上都趋向于不动点。稍微复杂一些的情况是所谓鞍点或双曲点。

图 5-2(*C*) 有些像马鞍或小脊梁凹下去的地方，沿某些方向是“汇聚”，沿另一方向则是“离去”。但它们的行为特点是都有稳定的“趋向”。

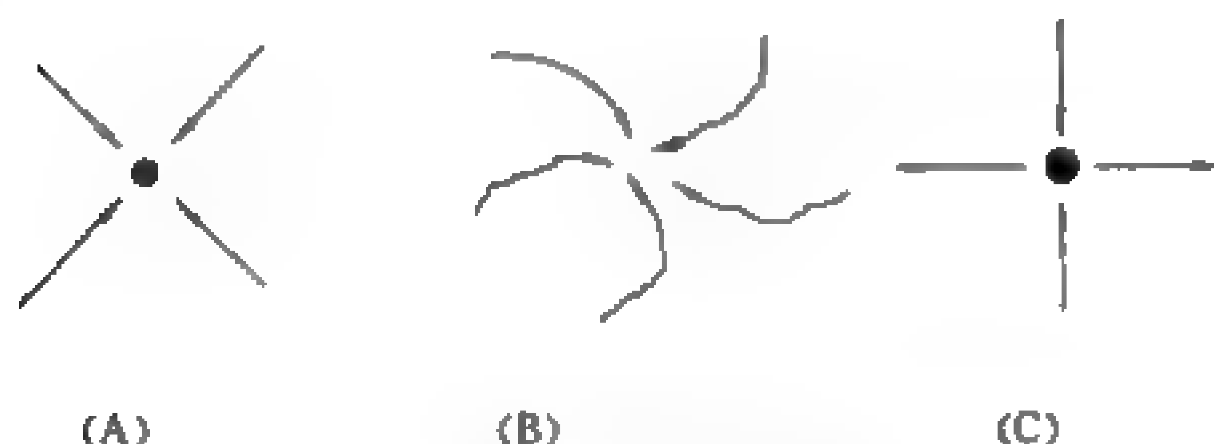


图 5-2　吸引子的分类

一维极限环是由系统的二维相空间收缩而来，它存在于二维相空间中，表现为一个“闭轨”(并不一定要求是“圆环型”)，因为在一维相空间中轨道必然相接，所以只可能是一种周期运动。

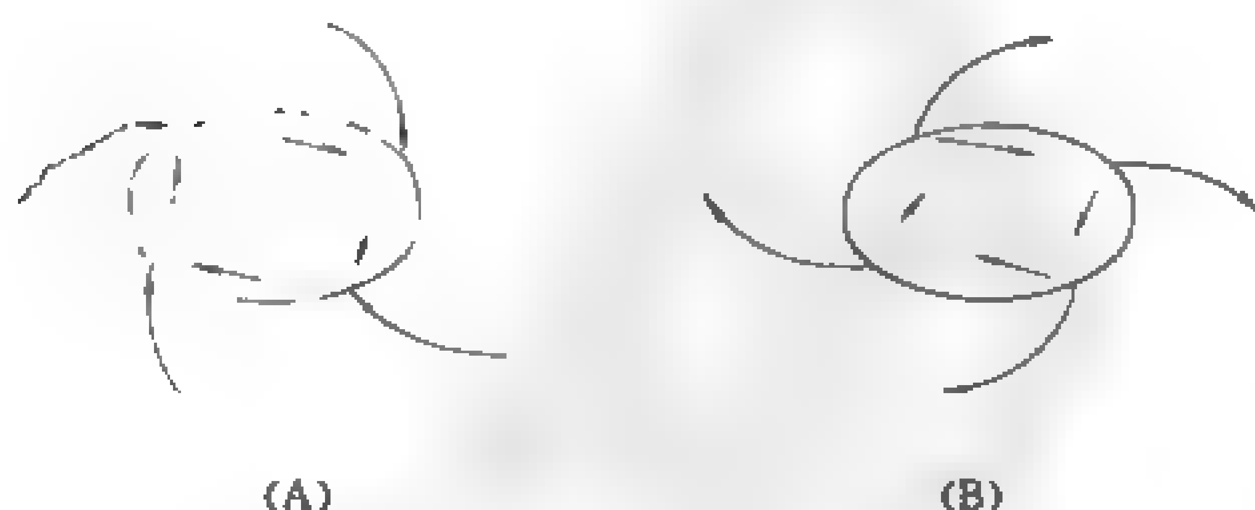


图 5-3　(A) 稳定极限环；(B) 不稳定极限环

二维吸引子存在于至少三维相空间中，表现为环面。三维吸引

子则至少存在于四维相空间之中，表现为高维环面，如此等等。二维和二维以上的吸引子可能出现多种运动形态。例如二维环面，前面提到存在两个周期运动，分别用 ω_1 和 ω_2 表示运动的周期，当 ω_1 与 ω_2 可公度时，即 ω_1 与 ω_2 之比为有理数，轨线首尾相接；形成一个螺旋式的"闭轨"，如图 5-4，是一个周期运动。如果 ω_1、ω_2 不可公度，即两者之比为无理数，则尽管仍处在一个环面上，但总不相交，表现为非周期运动或准周期运动。一般情况下，高维环面上的运动总是准周期性的。

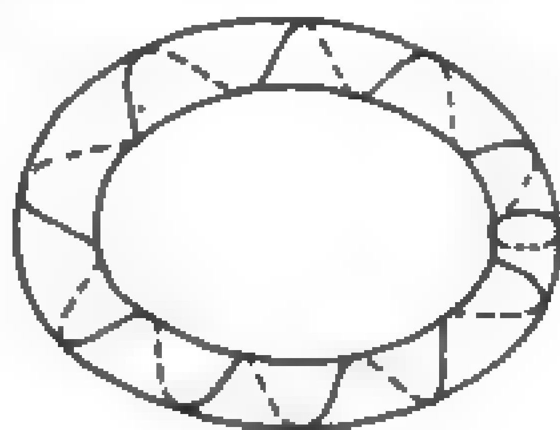


图 5-4　高维环面

总之，如果 $t\to\infty$ 时系统趋向于一个与时间无关的定常态，即相空间中一个特定的点，这就是不动点。不动点是零维吸引子。一维以上的系统原则上可能但未必都具有不动点。

如果 $t\to\infty$ 时系统中剩下一个周期运动，这就是一维吸引子——极限环。只有二维以上的相空间中，才可能出现极限环。通常极限环是由不动点发展起来的。当某个不动点在参数变化过程中由稳定而失稳，新的稳定状态往往是围绕着原有不动点的周期运动。这一过程称为Hopf分叉，它可以形象地理解如下：一个稳定的不动点附近，代表系统运动状态的流线如图 5-5(A)，从四面汇聚到不动点。不稳定的不动点是流线的源，所有的流线向外散开，如图 5-5(B)。假定控制参数的微小变化，使不动点失稳，也就是说由汇状态变成源的状态，不动点附近的局部形势就由图 5-5(A) 变到图 5-5(B)。但是一般来说，这种几何状态的改变只能是局部的，因为微小参数变化还不足以使整个流域内"河水倒流"。距不动点较远处的流线仍是向中央汇聚的。近处向外，远处向内，两种流向统

一起来的办法就是中间出现一条封闭曲线，成为内外两套流线的共同极限。图 5-5(*C*) 就是极限环。类似的集合考虑，可用于理解高维环面的产生。

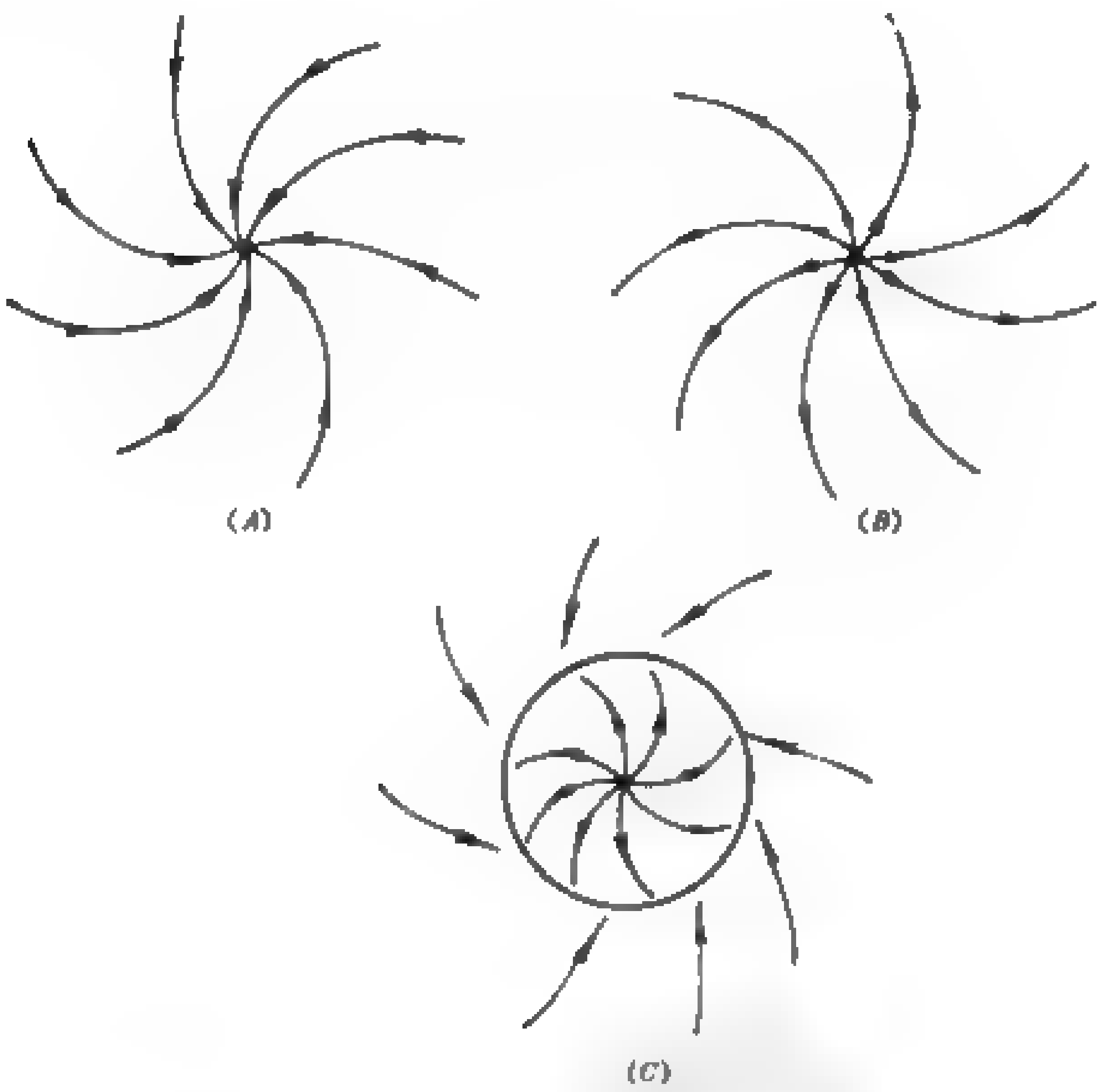


图 5-5 Hopf 分叉示意

三、奇怪吸引子

上面讲的吸引子，无论是零维、一维、二维、高维，都有一个共同的特点，它们的相空间维数都是整数维。这样的吸引子我们称之为"平庸吸引子"，而具有非整数维数的吸引子我们称之为"奇怪吸引子"。本书论述的核心问题是混沌运动，它在耗散系统中表现为混沌吸引子，但混沌吸引子与奇怪吸引子有着密切关系。为了有一个比较，我们需要对奇怪吸引子先做些说明。

从协同学的观点来看，系统演化的过程在大多数情况下是自组织过程，当耗散消磨了大量小尺度的较快的运动模式(快变量)时，系统长时间行为的有效自由度数目减少，即许多自由度在演化过程中成为“无关变量”，只剩下少数起支撑作用的自由度(慢变量)成为系统运动的“骨架”，这就是吸引子的自由度。但是，这些都还是系统的微观变量。问题是微观自由度归并的吸引过程将导致一些新的宏观变量(序参量)的产生。如果能找到一种能用来描述非平衡定常态的宏观变量的集合，它们又正好包含了那些 $t \to \infty$ 时起作用的自由度，那么就是一种成功的描述。

这些描述通常是在具有整数维数的空间中进行的，它们的维数在数学上称为拓扑维数，此时吸引子对应了系统运动微分方程解的极限集合，它们体现了当把相空间某一区域的点都取作初值时，这些轨道的 $t \to \infty$ 时的极限行为。

高维吸引子最可能有准周期运动，而非周期运动，因为在一个环面上轨道要准确地回到出发点是十分困难和罕见的。然而自70年代以来，人们越来越清楚地看到准周期轨道变成吸引子的可能性不大，更可能出现的是所谓的奇怪吸引子。

混沌态是整体稳定性与局部不稳定性的统一，因此进入混沌态后，系统的行为显然不能用平庸吸引子来描述。下面我们就来讨论奇怪吸引子。

奇怪吸引子(Strange attractor)的概念是1971年法国物理学家Ruelle和Takens首先为耗散系统引入的，用以描述由于耗散而使相空间在收缩的同时又出现局部不稳定的复杂情况。让我们想象一下这种情况：一方面在整体上相空间收缩使轨道出现会聚和归并，另一方面在局部轨道又相互分离、发散，为了使这两方面得到统一，唯一的办法就是让轨道无限制地“弯曲”、折叠起来。为此哈肯曾用一个形象的比喻：他把奇怪吸引子比作一个毛线球，尽管它有一个比较明确的边界，但其中的“线”可以有许多头(每一个头都代表一条轨线的初始点)。它们互相缠绕，来回穿行，永不相交(相交了就是闭合的周期轨道，而按照混沌运动的定义，其中不仅

有可数无穷多个周期轨道，而且还包含更多的、不可数无穷多个非周期轨道)。每条线都可以无限延伸，但却要一直处在有界的球体之内，这就将使轨线经过无穷次折叠，以致布满整个球体。

从理论上研究奇怪吸引子必须考虑三个问题：(1) 和平庸吸引子相比它有何特征?用什么方法来刻划这些特征?(2) 奇怪吸引子是如何演化而来的?(3) 奇怪吸引子与混沌运动有什么关系?我们重点讨论第一个问题。

对奇怪吸引子至今无一普遍接受的定义，只能用它所具有的特征作为奇怪吸引子的判据(在数学上往往认为具有同宿轨道的吸引子为奇怪吸引子)。我们现概括一下奇怪吸引子的三个"奇点"[4]：

(1) 奇怪吸引子的运动对初始条件高度敏感，即在系统的相空间中整体稳定而局部不稳定；

(2) 奇怪吸引子具有分维的性质，它往往是 Cantor 集与整维流形的直积；

(3) 奇怪吸引子的空间是非连续地随参数变化的。在小扰动情况下，空间的位置和填充过程产生较大变化。

对于这些奇异之点，人们作了定性和定量的刻划。其中包括用分形维数来计算(分维)吸引子中轨道的复杂程度，用 Lyapunov 指数来计算对初始条件的敏感性，以及用具备一定公理体系的公理 A 吸引子(关于公理 A 吸引子的定义将由下文给出)来从多种角度考察吸引子的普适特征。

由于前面两章已对分形维数和Lyapunov指数都有详细论述，这里只根据奇怪吸引子的特点作简要的叙述。

1. 局部不稳定性

奇怪吸引子有一个复杂但明确的边界。这个边界的确定保证了它在整体上的稳定。所谓整体稳定，是对系统整个相空间而言的。由于它是吸引子，所以只要系统的状态处在相应"吸引域"内，运动(演化)轨道都会向它会聚，而且一旦进入该吸引子的区域就永不离开它，除非系统相空间将发生根本性的变化。但是整体的稳

定并不能确保一切局部都稳定，事实上奇怪吸引子之所以对混沌研究具有重大意义，就在于它在整体稳定中又具有局部的不稳定性。即在奇怪吸引子之上，轨道会出现急剧（指数）分离。不难想象，这只有在一维或一维以上的相空间中才有可能，因为零维吸引子（不动点）上是没有“分离”余地的。下面将要详细讨论的 Lorenz 吸引子就存在于三维相空间之中，它由“两片”构成。由于在 X，Y，Z 张成的三维空间中我们不能直接画出轨线，所以只能看到其在两个平面上的投影。

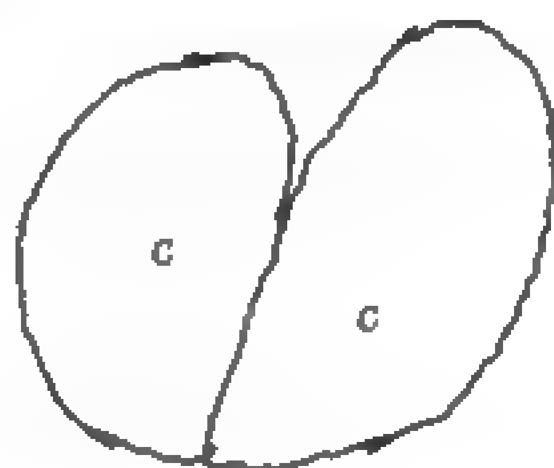


图 5-6

图 5-6 中的吸引子由两个绕不动点作周期运动的曲线所组成。在进入吸引子区域后，往往首先是在某一片上作周期运动，然后又跳回到原来那片。就这样在两片的圆周上随机地跳来跳去，呈现一种随机的运动。也许是由于这种图象有些像蝴蝶翅膀（图 5-6），也许是因为从一片到另一片仅需象蝴蝶振动那样小的扰动就会产生，洛伦兹最早曾把这叫做“蝴蝶效应”。

不稳定运动轨道在局部看来总是指数分离的，也就是说，对于任何一个自治非线性系统，它的近似线性系统必有正实部的特征值。那么，怎样在有限的几何空间中实现指数分离呢？按 Smale 的说法，以及 Ruelle-Takens 所谓描述奇怪吸引子的图象 —— 只能是通过无穷次的折叠，构造出新的集合。

如何刻划奇怪吸引子上整体稳定与局部不稳定之间的矛盾及其统一呢？数学上使用了“双曲性”的概念，我们说系统的相空间具有某种膨胀起来的“双曲性”。因为双曲点有一个方向稳定和一

个方向不稳定。奇怪吸引子也有内外两种方向：吸引域内一切在吸引子外的点都向它靠拢，而一切到达吸引子后的轨线则相互排斥。由此可以断言奇怪吸引子的维数必须大于零，否则无排斥的空间。而折叠又使奇怪吸引子具有层次和非整数维的特点。

在前面的几章中我们已经熟悉用 Lyapunov 指数来刻划不稳定的程度。下面我们考虑一个最简单的例子，看一下 Lyapunov 指数的具体计算。[7]

对于常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax_0 \tag{5.2.3}$$

解为 $x = x_0 e^{at}$。

如果 $a > 0$，则初始时刻相邻的两条轨道在下一时刻按指数率 e^{at} 分离，当 $a < 0$ 时，它们之间的距离按 $e^{-|a|t}$ 消失。

只有当 $a = 0$ 时不同初值给出的是不同的平行线，它们之间距离保持不变。在大多数实际系统中，特别是在耗散系统中，状态量 x 不能趋向于无穷。只有对非线性系统在给定状态附近实行线性化，才能在局部得到类似原先给出的方程形式。一般来说，这时 x 是矢量，而 a 是依赖于给定的线性化的矩阵。这个矩阵的本征值决定通过相邻两点的轨道间的拉伸、压缩或转动，其速率可能在相空间中各点都不相同。只有对运动轨道各点的拉伸或压缩速率进行长时间平均，才能刻划动力系统的整体运动效果，这就是上面提及的 Lyapunov 指数的概念。

一维映射下只有一个拉伸或压缩方向，情形可以大为简化。

考虑初值点 x_0 和它的近邻 $x_0 + \Delta x_0$。用映射函数 $f(x)$ 作一次迭代，它们之间距离是 $\Delta x_1 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$，而迭代几次后是

$$\Delta x_n = f^{(n)}(x_0 + \Delta x) - f^n(x_0) \approx \left|\Delta x \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=0} \tag{5.2.4}$$

与原来给出的方程比较可知 $\Delta x_n = \Delta x e^{\lambda n}$，于是当 $n \to \infty$ 时，

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log|f'(x_i)| \tag{5.2.5}$$

对于单峰映射，λ 是不依赖于 x_0 的数，称为映射的 Lyapunov 数。显然，一维映射只有一个 Lyapunov 数，$\lambda > 0$ 时运动的现局部不稳定，相邻轨道指数分离，轨道在整体稳定因素（有界、耗散等）的作用下反复折叠，形成混沌吸引子。而 λ 由负变正，表明运动向混沌的转变。这里要强调的是，仅仅观测相空间中的轨道不能肯定地刻划混沌运动，只有分析每点的切空间后才能进行判定。

更为复杂的情况是在相空间的不同方向上存在不同的"收缩"或"膨胀"。收缩对应了负的 Lyapunov 指数，膨胀对应了正的 Lyapunov 指数（以后简称 L 指数）。在存在多个 L 指数时，只要其中有一个为正就意味着出现了对初始条件的敏感性，而多个 L 指数都为正则是发达的混沌态。

此外，L 指数还与耗散系统相空间体积的收缩率有一定的关系。Oselades 证明，几个随机选取的"基矢"$l_i(i=1,\cdots,n)$ 与几个 L 指数有如下关系：

$$
\begin{aligned}
&\lambda(l_i) = \max(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \\
&\lambda(l_i, l_j) = \max(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \cdots, \lambda_{n-1} + \lambda_n) \qquad (5.2.6) \\
&\lambda(l_1, l_2, \cdots, l_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 就是相体积的收缩率。

应该指出，奇怪吸引子的研究工作正在迅速发展，但存在的问题还很多。例如，奇怪吸引子是否处处都具有同样的维数，高维的奇怪吸引子是否会有新的特征出现，怎样在实验前估计奇怪吸引子相空间的大小等等。目前，在众多的数学处理方案中，"微分动力系统理论"进展较大。该系统定义了一种满足公理 A(Axiom,A. Attractor) 的吸引子（又称为 AAA 吸引子）。它是一种具有处处均匀的双曲性且周期轨道稠密分布的吸引子，这似乎是一种具有典型性状的吸引子。

2. 分形维数

奇怪吸引子的第二"奇异"之处表现在它具有非整数维数。虽然并非所有的混沌吸引子都是非整数维数的，但大多数目前已知的吸引子的维数如表 5-1 所示。

表 5-1

名 称	维 数
Henon 映象	D = 1.20(μ = 1.2, b = 0.3 时)，
	D = 1.26, 1.236, 1.19(μ = 1.4 b = 0.3)
Lorenz 吸引子	D = 2.06(γ = 40, σ = 16, b = 4)
三波耦合方程	D = 2.32
Rossler 吸引子	D = 2.014(a = b = 0.2, C = 5.7)
强迫 Brusselator 振子	D = 2.15(A = 0.4, B = 1.2, α = 0.08, ω = 1.352)

在计算奇怪吸引子的维数之前先要学会计算分形的维数。

通常我们可以按分形维数的定义来计算。如最经典的分形实例是 Cantor 集合：取[0,1]线段，三等分后舍去中段，再三等分剩下的两段，同样舍去相应的中段。如此无穷重复下去，最终剩下的点的集合称为 Cantor 集合，它的维数可按上面分析，将[0,1/3]线段作为考虑对象，把尺寸放大 3 倍，则得到[0,1/3]，[2/3,1]两个与原来相等的对象。于是，按照定义：

$$D = \ln N/\ln L \tag{5.2.7}$$

将 $N = 2$；$L = 3$ 代入(5.2.7)即得到 Cantor 集的分形维数：$D = \ln 2/\ln 3 = 0.6309$。对于类似上面那些比较规整的几何图形，只要能计算 N 和 L，按定义就可求出它的分维。但对于十分不规整，难以计算 N 和 L 的对象，上面的办法就不适用了，这时我们通常采用盒子计数法来解决(实际上就是 Lebesgue 测度的计算方法)。因为我们的几何对象总是嵌在拓扑维数一定的基底空间中。例如，Cantor 集就是嵌在一维线段中。把基底空间划分成尺寸为 ε 的小盒子，数一下有多少盒中含有我们关心的几何对象的点，把盒子个数记为 $N(\varepsilon)$。在此基础上让 $\varepsilon \to 0$ 就得到盒子数计算公式：

$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{5.2.8}$$

由于在实际测量中只能取有限的 ε 值，因此通常先测量一系列 ε 和 $N(\varepsilon)$ 值，然后将它们绘在双对数坐标纸中，由 $\ln N(\varepsilon)$ 与 $\ln 1/\varepsilon$ 的直线段斜率来判断 D_0。这里要强调的是，只有当客观上存在

上述标度关系时才能求出分形维数，如果不存在这种标度关系，就根本不能使用维数的概念。这种方法定义的就是所谓的 Hausdorff 维数。

用盒子维数计算的主要缺点在于没有反映几何对象的不均匀性，含有一个点和许多点的盒子都具有同样的权重。修正的办法是把盒子计数作得更细致些，数清每个盒子中的点数，算出第 i 个盒子出现在 $N(\epsilon)$ 中的概率：$P_i(\epsilon) = N_i(\epsilon)/N(\epsilon)$，然后利用信息量的公式：

$$I(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i(\epsilon)\ln P_i(\epsilon), i = 1,2,\cdots,N(\epsilon) \quad (5.2.9)$$

可定义出信息维：

$$D_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(\epsilon)}{\log\frac{1}{\epsilon}} \quad (5.2.10)$$

盒子计数法概念清楚，但实用性较小，特别是当基底空间的维数较高时，计算量迅速上升。因此目前使用最多的是关联维方法，它等于从时间序列重构相空间的技术。

非线性系统的相空间可能维数颇高，甚至无穷，有时还不知道维数是多少，而吸引子的维数一般都低于相空间维数。我们从时间序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构造一批 m 维的矢量，支起一个嵌入空间。只要嵌入维 m 足够高(通常要求 $m \geqslant 2D + 1$，D 是吸引子维数)，就可以在只相差拓扑变换的意义下恢复原来的动力学。构造 m 维矢量的办法极多，最常用的是按间隔 p 从时间序列中取数，作为分量，$y_i = (x_i, x_{i+p}, \cdots, x_{i+(m-1)p})$，$i = 1,2,\cdots$ 关于如何选取嵌入维 m 和时间段 p，可参阅参考文献[8]。

y_i 构造好后，还要定义它们之间的距离。欧几里德的距离计算量也很大，实践中并不常用。其实，任何满足距离公理的定义都可以。例如，以两个矢量的最大差作为距离 $|y_i - y_j| = \max\limits_{1\leq n\leq m}|y_{in} - y_{jn}|$ 就可以大为节省计算时间。

凡是距离小于 ϵ 的矢量，称为有关联的矢量。假定一共构造了 M 个矢量 y_i，M 与 N 为同量级的大数，数一下有多少对关联矢量，

它在一切可能的 M^2 种配对中所占比例称为关联积分：

$$C(\epsilon)=\frac{M_1}{M_2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta(\epsilon-1/|y_i-y_j|) \tag{5.2.11}$$

其中 $\theta(x)=\begin{cases}1,(x>0)\\0,(x\le 0)\end{cases}$，完成代数关联对的任务。如果 ϵ 取得太大，任何一对矢量都产生"关联"$C(\epsilon)=1$，取对数后为 0。如果 ϵ 取得合适，而原始数据客观反映出类似 $N(\epsilon)\propto\epsilon^{-D_0}$ 的标度关系就可定义关联维：

$$D_2=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\ln C(\epsilon)}{\ln\epsilon} \tag{5.2.12}$$

我们的兴趣在于动力学导致的关联或回归。如果 ϵ 取得太小，已低于环境噪声和测量误差造成的矢量差别，由关联维公式算得的不是实际的分维而是嵌入维 m。在实际操作中，往往变动一批 m 的值，看能否得到不变的 D_2，即双对数关系 $\ln C(\epsilon)\sim\ln(\epsilon)$ 中的直线段。这样既可检验标度性质，又可有效区分噪声和动力学讯号。

用分维方法和Lyapunov指数来定义奇怪吸引子，都是从几何角度出发，它与运动的稳定没有必然的联系。数学研究时往往寻找这样一种定义，根据它可以刻划奇怪吸引子的性质。通常在动力系统理论中采用的是公理 A 吸引子(AAA)的概念。要说明这一概念，我们先要将双曲集和公理 A 作一说明。

设 N 维空间中的集合 Λ 被 T 映象于自身，如果对 Λ 中的任一点 x 都可分 R^N 解为 E_x^s 与 E_x^u，$R^N=E_x^s\oplus E_x^u$ 使得

A. E_x^s 与 E_x^u 是 T 的切映象 DTx(即 x 点的线性化映象)的本征方向；

B. 存在常数 C 及 $0<\lambda<1$，使 $\Delta x\in E_x^s$ 有 $\|DT_{nx}\Delta x\|\leqslant C\lambda^n\|\Delta x\|$；对 $\Delta x\in E_x^u$ 有 $\|DT_x^n\Delta x\|\leqslant C\lambda^n\|\Delta x\|$；

C. E_x^s 与 E_x^u 对 x 连续。

则称 Λ 为双曲集。

我们称映象 T 满足公理 A，如果：

A. T 的非游荡集 $\Omega(T)$ 是紧致双曲的；

B. $\Omega(T)$ 中映象 T 的周期点是稠密的，即充满了 T 的周期点

（稠密的）。

由上面双曲集及公理 A 的叙述就为数学研究提供了基础。

所谓的公理 A 吸引子就是指它的一个紧致双曲集并且是拓扑可迁的。它的定义是：我们称一个吸引子是公理 A 吸引子，如果：

① 它是一个紧致双曲集，② 在其中存在 x 使得向前轨道 $T_x^n (n = 1,2,\cdots)$，即在集合中是稠密的（也即拓扑可迁）。

最简单满足公理 A 的映象是 Smale 马蹄。具有 Smale 马蹄意义下的混沌的研究可以说有一系列有价值的方法和结果。目前用得比较多的方法有 Melnikov 方法，它对于研究微扰哈密顿系统等的混沌有很大力度，但必须指出的是 Melnikov 方法处理的结果证实的是具有混沌属性的不变集而未必就是奇怪吸引子，现在有些学者正在努力证实这一问题。

3. 混沌吸引子

严格地说奇怪吸引子并不就是混沌吸引子。因为奇怪吸引子是就吸引子的几何形态而言的，即主要表现系统在相空间中运动轨迹的几何属性。它的基本特点就是具有分形特征。混沌吸引子是就吸引子的动力学行为而言的，它的基本特征就是对初始条件的敏感依赖性。

事实上具有分形结构而不是混沌吸引子，和是混沌吸引子而不具有分数维数的情况也是存在的。例如在一维映象中，混沌吸引子的维数都是一维的，仅在从周期过渡到混沌的临界点上才具有分数维数。是奇怪吸引子而非混沌吸引子的情况在二维映象中也有一个典型例子：

$$x_n = f(x_n, \theta_n) \tag{5.2.13}$$

$$\theta_{n+1} = [\theta_n + 2\pi\omega] \bmod 2\pi \tag{5.2.14}$$

$$f(x,\theta) = 2L(\tanh x)\cos\theta, \omega = (\sqrt{5} - 1)、2 \tag{5.2.15}$$

区域 $|x| < 2L$ 经过多次映象后会形成一个吸引子。所有$(\theta = \pi/2 + 2\pi K\omega, x = 0)$ 与$(\theta = 3\pi/2 + 2\pi K\omega, x = 0)$，$k = 0,1,2\cdots$ 的点都在吸引子上。而所有$(\theta = \pi/2 + 2\pi K\omega, x \neq 0)$ 与$(\theta = \pi/2$

$+2\pi K\omega, x\neq 0$)的点都不在吸引子上。但吸引子含有其他θ值的$x\neq 0$的点。因此这个吸引子是一个奇怪吸引子。但是计算表明当$L=1.5$时，Lyapunov 指数为-1.059，这表明它不是一个混沌吸引子。因为混沌吸引子的 Lyapunov 指数必须为正。

但是，人们发现，大多数混沌吸引子都是奇怪吸引子。由此猜测奇怪吸引子与混沌吸引子之间存在本质性的联系。并且可以通过对维数的计算来得到混沌吸引子的 Lyapunov 指数。因此，我们以后对它们将不加以区别。

四、Lorenz 吸引子

Lorenz 吸引子可以说是迄今为止研究得最为深入的吸引子。如前所述，这个模型是由60年代初美国气象学家 Lorenz 在研究大气规律时得出来的。当时的计算工具是非常简陋的计算机，Lorenz 不得不把大气的流体力学方程简化到只剩下“骨架”。但是，随着打印机一行一行的输出，他发现这与自己的直觉相一致：气压忽高忽低，气流忽南忽北，呈现出一种有规律的无序。Lorenz 为了考虑更长时间的模拟情况，他输入的数据不是初值而是上次运算的中间值。这样一来就出现了问题，从这一中间值而引出的结果与上一次不一样，而且随时间推移差距越来越明显。由于这一结果的出现迫使 Lorenz 进一步研究只有三个方程的系统，也就是我们现在讲的 Lorenz 方程。他试图从中找出复杂行为的本质。这一方程所描绘的图形就是蝴蝶状的双螺旋线。

现在我们就 Lorenz 方程作进一步的探讨。它的方程如下：

$$\begin{cases} dx/dt = -px + py \\ dy/dt = -xz + rx - y \\ dz/dt = xy - bz \end{cases} \tag{5.2.16}$$

只要令$x=y=z=0$就容易得出三个定态解是$0(0,0,0)$，$C(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(y-1)}, r-1)$，$C'(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$。

从几何上说，Lorenz 吸引子的结构几乎完全由$0, C, C'$三点邻域性质所决定。它们的同宿线是一条向前向后都趋于同一不稳定

不动点的轨道。

在O点的线性化方程有一个大于零的本征值与两个小于零的本征值，因此就有了一维稳定流形与二维不稳定流形。C与C'的线性化方程有一个小于零的本征值与两个复本征值，因此在C与C'的邻域，轨道作环绕运动，出现图 5-7 所示情况（此时 $p = 10, b = 8/3, r = 13.926$）。

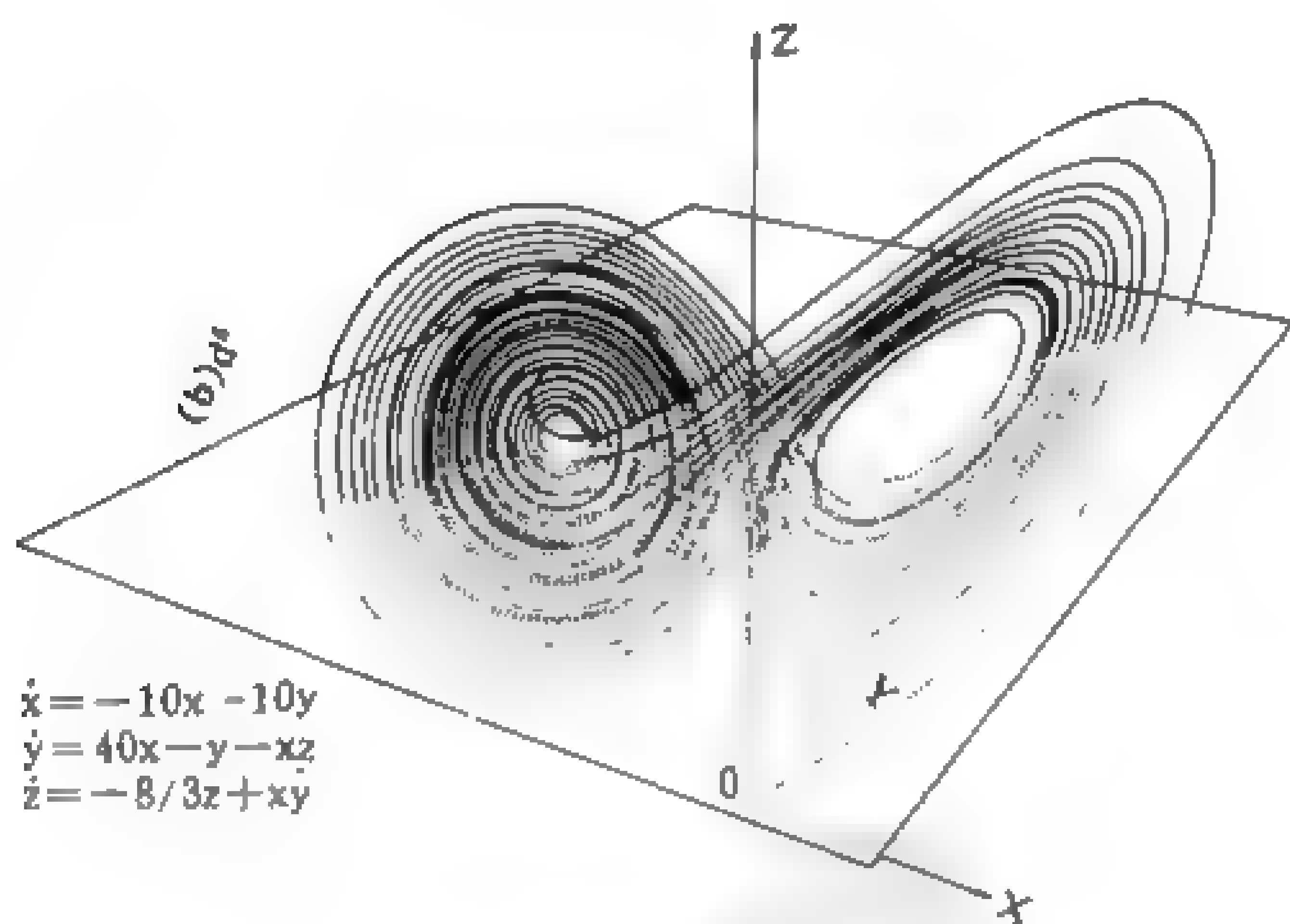


图 5-7

现在再看一下它们在 Poincaré 截面上的映象，即 $z = r - 1$ 截面。在原相空间上降低了一维的平面上，发现矩形框在映射时变成了楔形，如图 5-8 所示，Σ 为 Poincaré 截面，与其垂直的平面为O的稳定流形，因为z轴为不变轴，Σ平面同z轴垂直。稳定流形与Σ的交线D把Σ分为两部分，D的左边部分经过左边的返回流映象于

Σ, D 的右边部分流映象于 Σ。一个矩形 $BCEF$ 返回映象是两个楔形。[9]

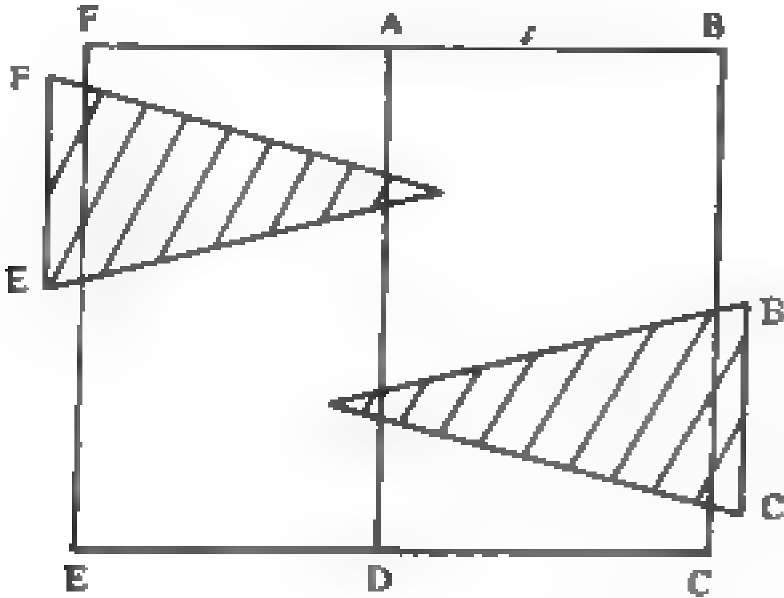


图 5-8

显然在图 5-8 中的楔形存在一条对 Poincaré 映象的不变曲线，不变曲线上点的 Poincaré 映象是一种一维映象，一般通过研究一维映象使问题进一步简化，可以发现 $p=10, b=8/3$，当 $24.06 < r < 24.74$ 时有奇怪吸引子存在。

有数学兴趣的读者可以进一步计算数据结果。这里只是描述实际 Poincare 映象在不变曲线上的投影。由于除不动点 O, C, C 外，微分方程的解是唯一的，轨道不可能相交，Poincaré 截面上的奇怪吸引子具有垂直不变曲线方向的 Cantor 集合的结构。其中有一点值得注意的是同宿轨线，这是研究混沌机制的主要着眼点，有人认为包含了同宿轨线的吸引子就是奇怪吸引子。

第三节　分叉与混沌

对于混沌运动，我们不仅要了解它本身的特征，而且要把握混沌发生的基本条件和一般规律。搞清有哪些通向混沌的道路。

对通向混沌道路的研究，最早可追溯到苏联著名的物理学家 D. Landau 等人对湍流发生机制的研究。现在已经清楚，湍流最初

是从层流开始的，当流速高到一定程度之后，原来有规则的层流或片流就会突然变为一种看上去十分混乱的流动，即湍流。例如，飞机机翼表面的空气流动、海上滚动的激浪等等，都有一个从层流变为湍流的突变过程。后来人们进一步发现，湍流并不是流体特有的现象，而是在许多远离平衡的系统中都可能出现。现在已在化学、光学、声学以及固体物理等领域中都发现了各种形态的湍流。然而，这种普遍现象却叫物理学家感到十分棘手。一百多年来，湍流问题已成为物理学中的一块“难啃的骨头”。

40年代，Landau和Hopf曾先后独立提出了一种湍流发生机制，其基本想法是认为湍流是一连串不稳现象的结果，这就是前面提到的Hopf分叉。当流体流速随雷诺数R增加并经历了一系列阈值时，先是接连出现层流（对应一个不动点），到第二个阈值不动点失稳，出现极限环，到第三个阈值极限环失稳，出现二维环面……。从极限环开始，出现频率为f_1的振荡，到达二维环面时出现新频率f_2。只要f_1与f_2的比值为无理数（即不可比），就意味着出现了不存在公共周期的准周期运动（永不准确地重复），接着会出现f_3，f_4，… 等相互不可比的准周期运动，以致越来越乱，最后达到湍流。

Landau和Hopf道路曾经为许多学者们接受，然而后来却被证明是错误的。因为从理论上讲，一个有限的耗散系统不可能无限制地出现不可比的新频率，而从实验上讲，人们运用激光干涉和多普勒效应等方法发现，新频率不断产生之后到一定时刻两个相近的频率会突然靠拢并锁住，结果频谱中只剩下少数几个被锁定的频率。这就是所谓锁频现象。

既然Landau Hopf道路行不通，人们只能另辟蹊径。1971年Ruelle从理论上证明，无须出现无穷多个不可比的新频率，只须经过四次分叉就可以产生湍流。他所提出的发展模式如图5-9。

后来，他又和Newhauss一同提出，不一定经过三维环面，整个过程只须三步就行，即从二维环面上产生准周期运动后就可直接形成奇怪吸引子（湍流）。

这条道路受到许多流体力学实验的检验。从功率谱上看，常常是先看到两个不可比频率带的出现，随后会突然出现宽带噪声，只是在少数情况才看到出现三个不可比频率。就目前的研究而言，还不能确定其中是否存在普适的临界指数。

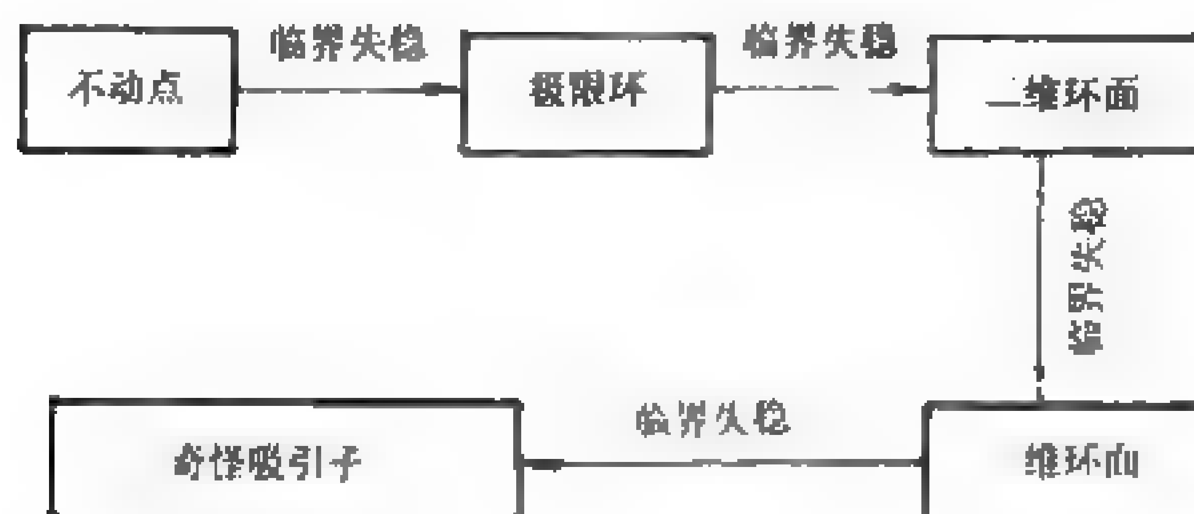


图 5-9

近年来，人们又陆续发现了另一些通向混沌的道路。其中倍周期分叉和切分叉是目前研究得最细致的两条。本节中我们将从研究倍周期分叉的一个典型例子开始，通过它揭示一维非线性映象的基本特征，进而引出倍周期分叉中的普适性。然后转向对切分叉的研究，并对两种通向混沌的道路进行比较。

一、虫口模型

在某个有限的生态环境中，例如一个岛屿上，有一种昆虫，当年繁殖，产卵，来年孵化为新的昆虫。如果我们对每年的某个季节作为考察的时间（相当于一个 Poincaré 截面），设第 j 年的虫子数为 x_j，显然 j 年以后，第 $j+1$ 年的虫子数 x_{j+1} 受两种情况制约：一是因繁殖而导致的自然增长，它与 x_j 有关。设 a 为增殖系数，故增殖数为 ax_j，另外由于生存空间和食物的有限导致了竞争和相互残杀，使虫子数相应减少，这与 x_j^2 成正比，设 β 为减少系数，故总共减少数为 βx_j^2。这样

$$x_{j+1} = \alpha x_j - \beta x_j^2 \quad (5.3.1)$$

这就是著名的 Logistic 方程，也即虫口模型，它可以适于很多具有生存竞争的例子。为简单起见，令 $x_i = \alpha/\beta x_j$，方程化为标准形式：

$$x_{i+1} = \mu x_i(1 - x_i) \quad (5.3.2)$$

它又称为 Logistic 差分模型。

由于知道 x_i 就可以求出 x_{i+1}，知道 x_{i+1} 就可以求出 x_{i+2}，以至以后各项。它表现一种迭代或映象过程，即按照函数 f 的复制过程。这里 $x_{i+1} = f(\mu, x_i)$，$f = \mu x_i(1 - x_i)$。f 是 x_i 的非线性函数，而且自变量只有一维。所以我们把它称为一维非线性迭代或映象。在一维非线性映象中，控制参量 μ 的取值对整个迭代发展有着至关重要的作用。下面将会看到，在 μ 的某些特殊值上将出现非周期性。

不难看出，这些模型的基本特点是 f 以及 f 对 x 的导数 f' 是连续的，它有一个极大值，在极值附近它是一个二次函数，两边的函数也是单调的。因此这类映象（迭代）又称为单峰映象。单峰映象有许多共同的属性，例如它并不依赖于函数形式（这就是后面要提到的所谓结构普适性），因此，只要研究其中的一个，就可以把握这一类的特征。

下面，我们结合作图和数值计算（仅用一般的函数型计算器就可以解决）来看一看一维非线性映象 $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$ 的基本性质。

先看单峰映象的图象（图 5-10）：45 度线表示 $y = x$，此时 x 的值即为 x_{n+1}，实现一次迭代。45 度先与 $f(x)$ 有两个交点 O 和 A，这是两个十分重要的点。如果严格地从 O 点或 A 点出发，那么迭代结果总是不变，就好像在原地踏步，因此它们是“不动点”。但是不动点又分为稳定的和不稳定的，判别方法就是作一小的扰动，再看以后迭代的结果是偏离越来越大还是回复到不动点上去。用这种方法，不难判定如果 O 点是不稳定的，一旦有微小偏离就会永不复回，若 A 点是稳定的，无论从哪个初值出发（当然不能超出单峰范围）最终都会回归 A 点，以后永不离去。如前所述，这种稳定的不

动点又称为吸引子。

让我们进一步考虑环境对系统的影响，这种影响是通过改变参量 μ 值来控制系统演化的。当 μ 在不同区间取值时，上述不动点的分布和稳定性将发生相应的变化。

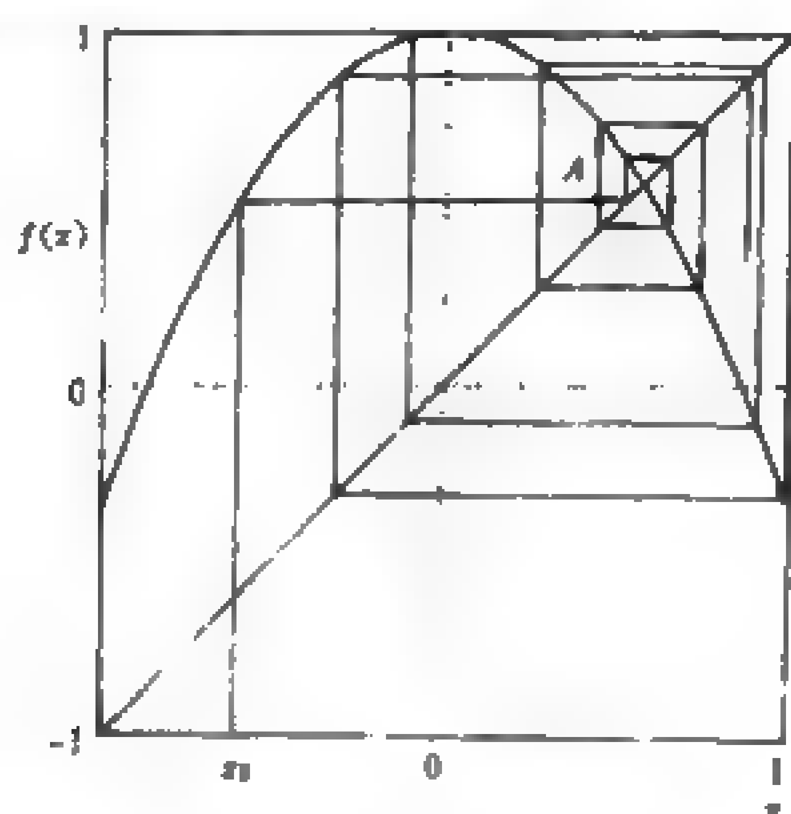


图 5-10　单峰映象

(1) $0 < \mu < 0.75$

例如取 $\mu = 0.5 = 1/2$，x_0 取 0 值，则迭代结果如下：

$x_0 = 0$

$x_1 = 1 - 1/2(0/2) = 1$

$x_2 = 1 - 1/2(1/2) = 0.5$

$x_3 = 1 - 1/2(1/2)2 = 7/8 = 0.875$

$x_4 = 1 - 1/2(7/8)2 = 0.6171875$

$x_5 = 0.80953979$

$x_6 = 0.67232266$

$x_7 = 0.77399112$

$x_8 = 0.70046887$

$x_9 = 0.75467167$

……

$x_{\infty} = 0.732050808$

$(x_{\infty} = \sqrt{-1})$

这里 x_{∞} 表示迭代无穷次以后的结果。但是我们怎样知道($x_{\infty} = \sqrt{3} - 1$)呢?下面不妨换一个方式来讨论。如果迭代最终会收敛于某个稳定的不动点 x^*,这时必有

$$x_{n+1} = x^* (n \to \infty)$$

将此式代入原迭代方程可得:

$$x^* = 1 - \mu x^{*2} \tag{5.3.3}$$

它是一个简单的二次方程,其解 $x^* = -1 \pm (\sqrt{1+4\mu}/2\mu)$,即为不动点。

当 $\mu = 1/2$ 时,$x_1^* = \sqrt{3} - 1$,$x_2^* = -\sqrt{3} - 1$,求得不动点以后,要进一步判别它们的稳定性。其一般方法如下:

设 x^* 为需要判的不动点,让它作一小偏离 ε_n,考察 x^* 附近的某个 $x_n = x^* + \varepsilon_n$。但 x_2^* 与假设 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ 不符应该舍去。从 x_n 迭代出来的 x_{n+1} 应有 $x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1}$,所以只须比较 ε_n 到 ε_{n+1} 变化的趋势就可以判定 x^* 的稳定性。

显然,稳定的条件可以表示为 $\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n < 1$。

为求得此比值,可以对 f 作级数展开:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(\mu, x_n) = x^* + \varepsilon_{n+1} = f(\mu, x^* + \varepsilon_n) \\ &= f(\mu, x^*) + f'(\mu, x^*)\varepsilon_n + \frac{1}{2}f''(\mu, x^*)\varepsilon_n^2 + \cdots \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

由于 ε_n 很小,高次项可以忽略。又因不动点的条件为 $x^* = f(\mu, x^*)$,代入后可得:

$$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n = f'(\mu, x^*) \tag{5.3.5}$$

可见,要判 x^* 处的稳定性只要求出 $f'(\mu, x^*)$ 并看其是否大于 1。在上例中,$f(\mu, x) = 1 - \mu x^2$,$f'(\mu, x) = -2\mu x$。

当 $\mu = 1/2$ 时,$f'(\mu, x^*) = x^*$,而 $x^* = \pm(\sqrt{3} - 1)$,即 $x^* < 1$,所以是稳定的。

对于一般的 μ 值,x^* 稳定的条件为

$$f'(\mu,x^*) = 2\mu x^* < 1 \quad (5.3.6)$$

将 $x^* = -1 \pm \dfrac{\sqrt{1+4\mu}}{2\mu}$ 代入，得到此映象的稳定条件为 $(\sqrt{1+4\mu}) < 2$，即 $\mu < 0.75$。

(2) $0.75 < \mu < 1.25$

如果 $\mu > 0.75$，原来的 x^* 失稳后又会出现什么情况么?我们先试验一下 $\mu = 1$。仍令 $x_0 = 0$，求得一组数据如下：

$x_0 = 0$，$x_1 = 1 - 1 \times 0^2 = 1$，$x_2 = 1 - x^2 = 0$，

$x_3 = 1 - 1 \times 0^2 = 1$，$x_4 = 1 - 1 \times 0^2 = 0$，……

可以发现，x_n 在 0 和 1 之间来回跳动。用其他的 μ 值和 x_0 初值试验，得到的结果是经过一个过渡阶段后，数据仍在 0 和 1 两点之间来回跳动。这种情况可一般地写为

$$x_2^* = 1 - \mu(x_1^*)^2 \quad (5.3.7A)$$

$$x_1^* = 1 - \mu(x_2^*)^2 \quad (5.3.7B)$$

或

$$x = f(\mu,x) = f(\mu,f(\mu,x)) \quad (5.3.8)$$

这称为两点周期，记作 $2p$。

用同样的方法判别两点周期点的稳定性范围。

用 $F(2,\mu,x)$ 表示 $f(\mu,f(\mu,x))$，令 $F'(2,\mu,x) < 1$，即可求得 μ 值的范围。不过，如果 $\mu = 1.25$，两点周期会失稳。

(3) $\mu > 1.25$

仍用“试验”和理论计算的方法，我们将发现，随着控制参量 μ 的逐步增大，在两点周期失稳后会出现四点周期 $4p$。以后 $4p$ 失稳，出现 $8p$，$8p$ 再失稳，出现 $16p$，如此下去，直到 $\mu = \mu_\infty = 1.40115\cdots\cdots$ 时，数据迅速达到无穷长的周期，即出现随机性，达到混沌。其图象如图 5-11 所示。从这里我们可以比较清晰地看到一条经过周期倍增达到混沌的通路。

(4) $\mu > \mu_\infty$

$\mu > \mu_\infty$ 的情况是系统的运动进入混沌区以后情况，这是需要重点加以分析的。我们让 μ 值在 (0,2) 之间进行选取，并按 $\Delta\mu=$

0.0075的"步长"进行计算，为简单起见，每次都以 $x_0=0.4$ 作为初始值开始迭代。为避开暂态，我们先舍去前 300 次迭代点，然后把迭代结果表示在如图 5-11 中。

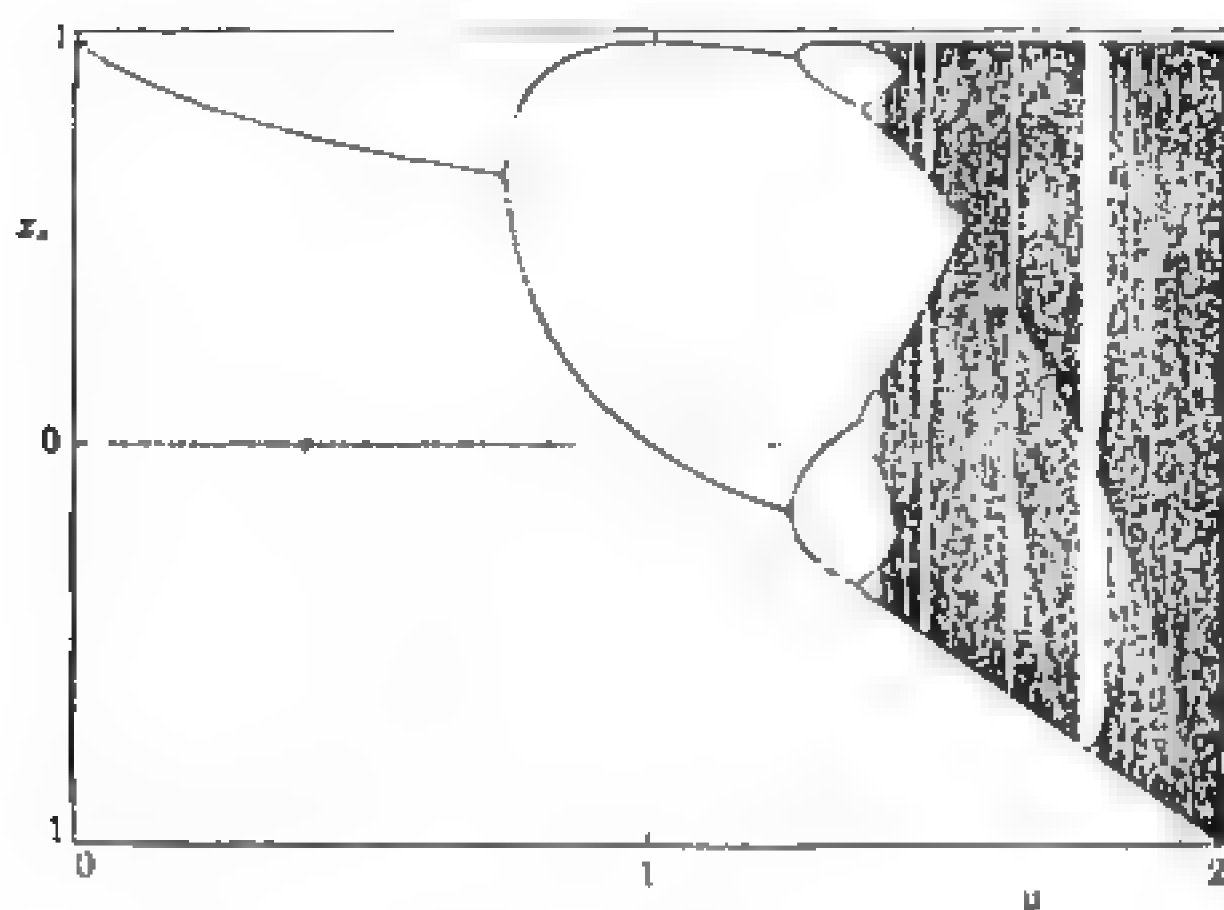


图 5-11

这一图象就是在混沌学中用得较多的倍周期分叉图。下面我们从更一般的一维非线性映象理论上对它们进行分析。

二、一维非线性映象

虫口模型在数学上的名称就是一维非线性映象。一维非线性映象对研究耗散系统中的混沌具有普遍而重要的意义。这表现在从一维非线性映象中得到的分叉序列与临界点附近的标度性质对于高维的情况也普遍适用。数学上已经证明，N 维耗散系统的倍周期分叉所表现出来的标度性与一维非线性映象是一样的。原因可能在于，在参数空间中某一点的邻域内考察系统的变化时，相空间的行为往往只在一维方向上发生拓扑变化。同时，对于混沌运动来说，一维非线性映象所反映的是 Lyapunov 指数大于零的方向。从图象上看这只有两种可能：一种是像单峰映象那样在区间"折叠"

中映象于自身，一种是像 Lorenz 映象那样，把区间分为两个部分，重叠地映象自身。而相比之下，前者更为简单，也更具有解析性。

非线性映象有多种形态，在一维时最简单的是"单峰映象"，在二维时是圆映象，它们分别反映了从周期运动和准周期运动向混沌过渡的情况，因此是我们研究的重点。

虫口模型是一个单峰映象。单峰映象是最简单，也是最具代表性的一维非线性映象。单峰映象是因该映象的图象只有一个最大值而得名的，这个极值点也就是它的临界点，在临界点附近系统的行为是我们研究系统运动和演化时特别需要加以重视的。

上一节中讨论的虫口模型是典型的单峰映象(有的地方又称为抛物线映象)，它的标准形式为：

$$x_{n+1}=1-\lambda x_n^2 \qquad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{5.3.9}$$

或

$$x_{n+1}=4\mu x_n(1-x_n),\ 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{5.3.10}$$

对单峰映象的研究需要回答五方面的问题：

第一，固定一个参量 μ 值，对一切初值所产生的轨道进行定性分析，对每一类轨道进行刻划。

第二，改变参量 μ，研究轨道的定性行为变化，特别是在怎样的 μ 时从一种类型变到另一种类型，并分析在突变的 μ 附近的情况，寻找突变的性质和机理。

第三，从整体上研究，固定参量 μ，改变初始条件时会有多少不同类型的轨道可以共存，以及 μ 在整个范围内变化时会出现多少不同类型的固定周期和它们实现的顺序。

第四，看映射中有无混沌轨道，有哪些通向混沌的道路。比较各种混沌轨道的混沌程度。

第五，分析外部噪声对系统的影响，过渡过程的分类，等等。

针对上述问题，分析虫口模型(一维非线性映射或抛物线映射)我们发现：

(1) 最简单的情况是出现不动点和周期 1 轨道。

不动点 $x^*=f(\mu,x^*)$ 是非线性方程 $x-f(\mu,x)=0$ 的解或

零点。对不动点进行稳定性分析，我们得到不动点稳定的条件是

$$S=\left|\frac{\partial f(\mu,x)}{\partial x}\right|_{x=X^{*}\leqslant 1}\leqslant 1 \tag{5.3.11}$$

从 $S=1$ 中我们可以求得相应的 μ 值，它标志了稳定的边界。

当 $f'(\mu,x)=1$ 时出现切分叉；当 $f'(\mu,x)=-1$ 时出现倍周期分叉；

当

$$S=\left|\frac{\partial f(\mu,x)}{\partial x}\right|_{x=X^{*}\leqslant 1}\leqslant 0 \tag{5.3.12}$$

称为超稳定不动点或超稳定周期 1。这种超稳定的情况通常只发生在某些特定的产量 μ 上。对于抛物线映象来说，超稳定不动点出现在极大值 C 所对应的 μ 值上。

(2) 出现周期轨道。如出现周期 2 轨道，周期 3 轨道等等。

周期 P 轨道的定义如下：

在经过一个暂态过程后（这个暂态过程发生在从 x_1 到 x_n 之间，此时 x 的变化看不出什么规律性），当 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p-1}$ 与 $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p-1}$ 完全相等时，我们称它为周期 P 轨道。

其中 P 为周期轨道数。如 $P=1$ 时为周期 1 轨道，或 1 点周期。它表示轨道在 Poincaré 截面上只有一个交点，绕一周就回到原来的地方。而周期 P 轨道表示要经过 $1,2,\cdots,P$ 个交点才回到原来的地方。

在 (x,μ) 平面上，有 P 个周期点：$x_1, x_2, \cdots, x_p$。它们中的任何一个对应于复合函数：$f^{p}(\mu,x)\equiv f(\mu,f(\mu,\cdots f(\mu,x)\cdots))$ 的不动点（以上共有 P 个括号）

以后，为了简单起见，我们把它记作：

$$f^{(p)}(\mu,x)=f^{\circ}f^{\circ}\cdots f(\mu,x) \tag{5.3.14}$$

由于

$$x_i=f^{(p)}(\mu,x)\quad i=1,2\cdots P \tag{5.3.15}$$

可得到周期 P 轨道的稳定条件为

$$S=\left|\frac{\partial f(\mu,x)}{\partial x}\right|_{x=X^{*}\leqslant 1}\leqslant 1 \tag{5.3.16}$$

运用复合函数微分的链规则

$$\frac{\partial f^{(p)}(\mu,x)}{\partial x}=\prod_{i=1}^{p} f'(\mu,x) \tag{5.3.17}$$

即为各周期点处的一阶导数的连乘积。于是,周期 P 轨道稳定的条件为:

$$S\equiv\left|\prod_{i=1}^{p} f'(\mu,x)\right|\leqslant 1 \tag{5.3.18}$$

在 $\prod_{i=1}^{p} f'(\mu,x)=0$ 时为超稳定周期轨道。

这里的 μ 值为 μ 值。对于抛物线映象,显然只有在顶点 C 处才有 $f'(\mu,x)=0$

可见超稳定周期轨道点中必包含临界点 C,反之,含有临界点 C 的周期轨道一定是超稳定的。

值得注意的是,在 $\mathrm{d}f^{(p)}/\mathrm{d}x=0$ 的参数值附近必有大于和小于零的区域,通常这样的区域延伸到 $+1$ 和 -1,从而在参数轴上划出一个 $S\leqslant 1$ 的稳定区间,它对应了稳定周期 P 轨道的窗口,简称为周期窗口。

以上的讨论虽然是对一维非线性映象而言的,但原则上适用于对所有的非线性系统进行线性稳定性分析。只不过在复杂的情况下用 Jacobi 行列式代替导数,用矩阵乘积代替导数乘积就行。

三、倍周期分叉

倍周期分叉是分叉的一种特殊形式,它的特点是周期点由一分为二,二分为四,四分为八等等。倍周期分叉对混沌学研究之所以重要,就是因为这样无限地分下去将导致混沌轨道的出现,它成为目前通向混沌最典型的途径之一。

运动轨道的分叉通常是在失稳后出现的,这可以从一维非线性映象的图 5-11 中看出:当 $0<\mu<0.75$ 时有不动点 $x^*=0.732050808$,在 $\mu=0.75$ 时,此不动点失稳,从周期 1 点分叉为周期 2 点。当 $0.75<\mu<1.25$ 时有稳定的周期 2 点(稳定的两点周期),在 $\mu=1.25$ 时,周期 2 点又失稳,从周期 2 点分叉为周期 4 点,当 $1.25<\mu<1.3681$ 时稳定的周期 4 点,在 $\mu=1.3681$ 时,周期 4 点再次失稳,分叉为周期 8 点。如此等等。在区间 $1.3681<\mu$

<1.40115518909205，倍周期分叉的情况会一再发生，直到 $\mu=\mu_\infty=1.40115518909205\cdots$。周期变得无限长，或者实际上是根本没有周期，这就到达了混沌态。

现在的问题是对从图象上看出的倍周期分叉作怎样的理论解释。为此需要引进相应的数学定理。

倍周期分叉的数学基础是分叉理论中的隐函数定理和倍周期分叉定理。

1 隐函数定理

隐函数定理的基本精神是如果有一个方程 $F(x,y)=0$，它就给出了 x 和 y 的某种隐含的关系。能不能从这个方程中解出它们明显的函数关系 $y=h(x)$ 或 $x=k(y)$ 呢？这里需要一些相应的条件。隐函数定理就给出了这些条件。和 Liouville 定理对耗散系统的意义一样。分叉与混沌就发生在隐函数定理的条件得不到满足的时候。

为了通过方程 $f(x,y)$ 求出 $y=h(x)$ 或 $x=k(y)$，让我们考虑全微分

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \tag{5.3.19}$$

如果 $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$，我们可以求得 $\frac{dy}{dx}$ 满足的方程，而当 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，可求得 $\frac{dy}{dx}$ 的方程。然后才有希望再进一步求得 $y=h(x)$、$\frac{dh(x)}{dx}$ 等关系。一般说来，只能在 $x-y$ 平面的特定点 (x_0,y_0) 附近，当我们确知 $F(x_0,y_0)=0$ 成立，并且了解 F 和它的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 附近的行为时，才能询问在 (x_0,y_0) 附近有没有函数关系 $y=h(x)$ 或 $x=k(y)$ 存在。

最简单的隐函数定理可以表述为：$F(x_0,y_0)=0$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近可微分，且 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处不等于零时，在 (x_0,y_0) 附近存在着唯一的解 $y=h(x)$，满足：

(1) 在 (x_0,y_0) 附近，$F(x,h(x))=0$ 成立；

(2) $$\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\Big|y=h(x) \tag{5.3.20}$$

当然，也可以把定理中的导数条件换成$\frac{\partial F}{\partial x}$在$(x_0,y_0)$附近不为零，把它表述成关于$x=k(y)$和$\frac{\mathrm{d}k(y)}{\mathrm{d}y}$的定理。

从隐函数定理成立的条件中不难看出。只有当某个偏导数等于零时，解的唯一性才被破坏，从而有可能出现新的情况。倍周期分叉就是这样的实例。

2 倍周期分叉定理

如果要求映射函数$f(\mu,x)$在某个不动点出现倍周期分叉，它需要满足以下条件：

(1) 在(μ,x)平面中存在有不动点

$$f(\mu^*,x^*)=x^* \tag{5.3.21}$$

(2) 在此不动点处稳定性条件达到边界-1，即

$$\frac{\partial f(\mu,x)}{\partial x}\Big|_{x=x^*}=-1 \tag{5.3.22}$$

为了记录方便，以后我们把$f|_{x=x^*,\mu=\mu^*}$简记为$f|_*$；

(3) 在此不动点处，混合二阶导数

$$\frac{\partial^2 f(\mu,x)}{\partial\mu\partial x}\Big|_*\neq 0 \tag{5.3.22}$$

在此不动点处，函数f的 Schwarz 导数

$$S(f,x)=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2<0 \tag{5.3.23}$$

在通常的映象函数中$S(f,x)$总是能得到满足。因此(1)(2)(3)三个条件得到满足，就可以保证在$\mu-x$平面中μ^*的一侧存在$x=f(\mu,x)$的唯一个稳定解，而在另一侧将出现三个解，其中一个是原来解的延伸，但它是不稳定的，而另两个解却是稳定的。如果前面的解，即发生了稳定性变化的解代表了周期 1 的话，那么在μ另一侧出现的新稳定解就代表了周期 2。这样，当每一"支"都一分为二的话，就出现了倍周期分叉。

四、切分叉[10]

对于混沌研究来说，一维非线性映象真可谓是一个矿藏丰富的宝库。在它的分叉图中除了有著名的倍周期分叉外还有意义深远的切分叉图，后者之所以重要在于它与阵发混沌，周期 3 有着密切关系。下面我们来研究一下周期 3、切分叉和阵发混沌。

1 周期 3 的来源

周期 3 的意义因 Yorke—李天岩的那篇著名论文《周期 3 蕴含混沌》而广为人知。但是，很显然，周期 3 不可能来自倍周期分叉，因为无论怎么个分法，倍周期分叉的结果都只能产生二的倍数的偶数类，而不能产生奇数类周期，因此，周期 3 的出现意味着产生了一类新的分叉。那么，周期 3 是怎样产生的呢？让我们再仔细研究一下一维非线性映象的分叉图。从图 5-11 中可以看出周期 3 窗口的起点对应了参数 $\mu=1.75$。在这里我们给出 $f(\mu,x)$ 和 $f_3(\mu,x)$ 两条曲线，从图中看出，$f^{(3)}$ 有 4 个不动点。其中一个是从原来 f 的稳定不动点变化而来的不稳定不动点，另外三个则是稳定的不动点。因为图象上它们正好与分角线 $x=y$ 相切。

显然，当 μ 值向大于 1.75 的方向发展时，三个原来相切的地方的曲线会出现相交，从而产生 6 个交点。用初等数学不难证明，在每对交点处曲线的切线的斜率必有一个为正，一个为负，即一个稳定，一个不稳定。这三个稳定的正好对应了新的周期 3 轨道。这就是周期 3 的来源。由于它们是在相切的交点上产生的，因而又被称为“切分叉”。

2 切分叉定理

与倍周期分叉的讨论相同，我们引入切分叉定理：

如果映象 $f(\mu,x)$ 满足下列条件：

(1) 在 (μ,x) 平面中存在一个不动点，即

$$f^{(n)}(\mu^*,x^*)=x^* \tag{5.3.24}$$

(2) 在此不动点上，达到稳定边 +1，即

$$\frac{\partial f^n(\mu,x)}{\partial x}\Big|_*=+1 \tag{5.3.25}$$

(3) 在此不动点处，$f^{(n)}$ 对参量 μ 的偏导数不为零，即

$$\frac{\partial f^n(\mu,x)}{\partial \mu}\Big|_* \neq 0 \tag{5.3.26}$$

(4) 同时，二阶偏导数也不为零，即

$$\frac{\partial^2 f^n(\mu,x)}{\partial x^2}\Big|_* \neq 0 \tag{5.3.27}$$

则在(μ^*, x^*)附近存在一个小区域里将出现切分叉。切分叉和倍周期分叉的不同之处在于，它在导致混沌时又引出了新的周期运动轨道，这样一来混沌的出现呈现出“阵发”的特点。

3 阵发混沌

阵发混沌最初也是见于 Lorenz 模型。人们发现，它与倍周期分叉是孪生现象，在能观察到倍周期分叉的系统中，原则上都能看到阵发混沌的情况，因此又可以把它看作是同一道路的两个方面。在此，比较单纯而又被详细研究过的还是一维非线性映象。例如，一个具有周期 3 的非线性现象 $y_{n+1}=F(3,\mu,y_n)$，当 μ 接近于 1.75如 $\mu=1.74$ 时有如图 5-12 所示的图象。

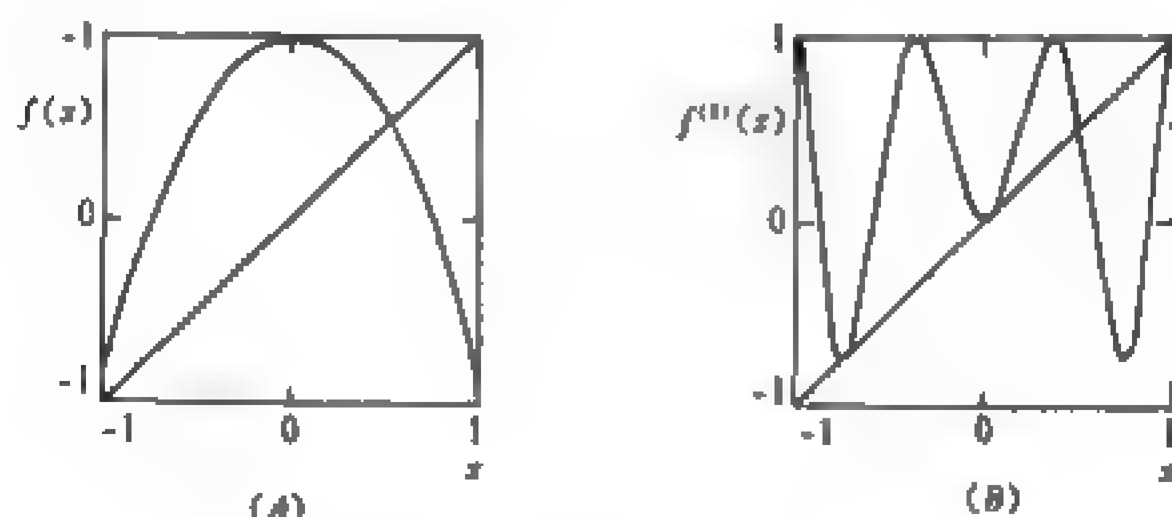
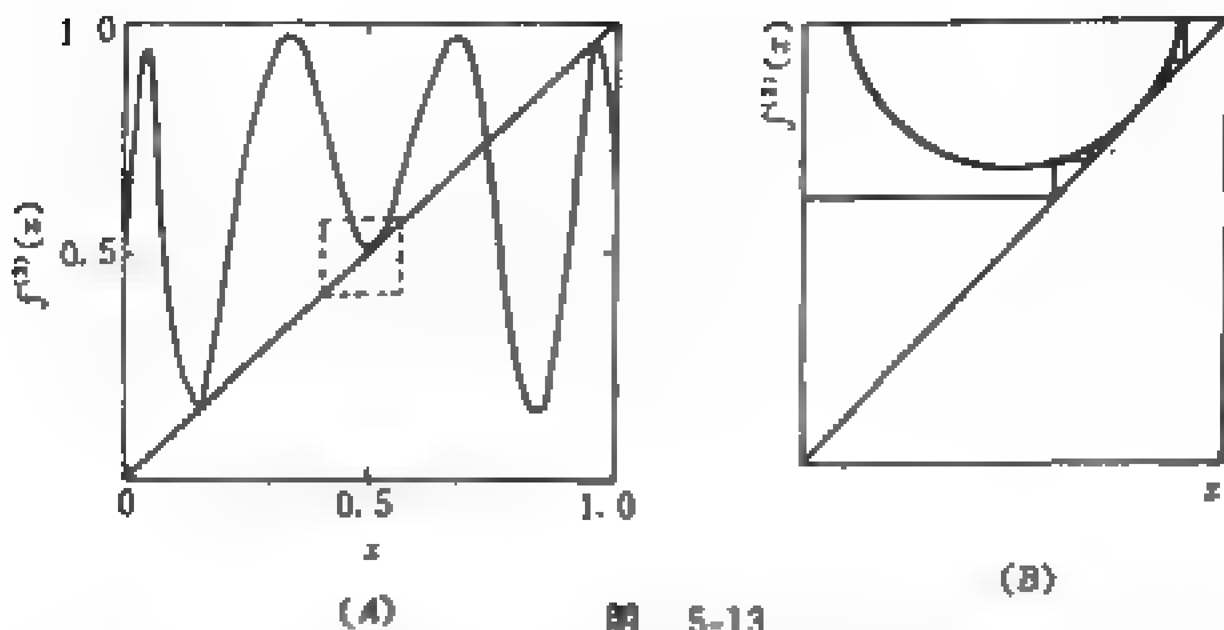


图 5-12

一旦 μ 达到 1.75，就有三个峰或谷同时与对角线相切，即构成周期 3。在接近的过程中，每一个与 45°线即将相切的峰或谷附近的行为都好像是收敛于一个不动点。但是在尚未相切的时候，这里并没有真正的不动点存在，于是发生在这狭小的“走廊”间的情况，如图 5-13 所示；每次似乎从一个方向接近切点，但又从另一端跳出去，跳到另外的“走廊”之中，就这样随机地跳来跳去，从而形成“夹”在周期 3 轨道中的混沌带。



(A)　　图 5-13　　(B)

这个过程还可以从动态的角度去考察。当 μ 接近 μ_c 时，出现三个稳定周期，它对应着有序状态，而当 μ 离开 μ_c 则可以看成是从有序到湍流的发展。

以上我们对两种导致混沌的典型分叉形式进行了较为详细的讨论，无论从相空间中的图象，还是从实验数据中，我们都发现了一些带普遍性的特征，它们预示着在混沌运动混乱的表面背后存在着深层的普遍规律性。下一节中我们就利用上面的材料，来寻找其中的普适性。

第四节　普适性和普适序列

从最基本的意义上讲，科学活动的根本目标就在于寻找一定的普适性，即适合于众多现象的普遍规律性。当然，普适的范围各有不同，哲学的普适性适合于几乎所有的事物，而某门学科中的普适性则仅仅适合于该学科研究的对象。当我们对耗散系统中的混沌进行了一番探讨后也的确发现了一些普适性。其中包括一些如费根鲍姆(Feigenbaum)常数在内的自然常数。这些新自然常数的意义非同小可，它往往在一门学科的发展史上具有里程碑的意义。正如数学中的圆周率 π、自然对数的底 e、物理学中的光速 C、普朗克常数 h、玻尔兹曼常数 k_B、天文学中的哈勃常数等等，它们的发现和测量不仅代表了当时科学研究的最高水平，也为以后的发展

奠定了基础。著名物理学家海森堡曾经指出，每一个自然常数的出现都对应了一种新的理论。例如光速 C 对应了相对论，普朗克常数 h 对应了量子力学。那么，对复杂系统理论、混沌理论又对应了哪些自然常数呢？现在人们正在谈论费根鲍姆常数。当然，混沌理论还处在发展的初期，谈论某个自然常数还为时过早。我们更倾向认为对如此广泛的自然与社会现象，可能存在的不是一个而是一系列自然常数，而且，并不是所有的普适性都可以或必须用某个“数”来表示。有时它们会表现为一种普遍的形态或一些序列。

一、无限嵌套作相似几何结构

在一维非线性映象的分叉图中我们发现存在一种无限嵌套的自相似几何结构。在讨论这种有趣的结构之前，可以先作一个形象的比喻。在日常生活中有时会碰到相互嵌套的一些物体。例如洋葱头的结构。它是一层包着一层，里面的形状和外面的基本相同。杂技团里有一种套箱，它们是大的套小的，一层层套下去。每层的尺寸不同，而形状相同。另外我们可以想象一种由若干个小“大”字构成的“大”字，而每个小“大”字又由更小的“大”字所构成，以至无穷。这就是一种想象的无限嵌套自相似结构(图 5-14)。

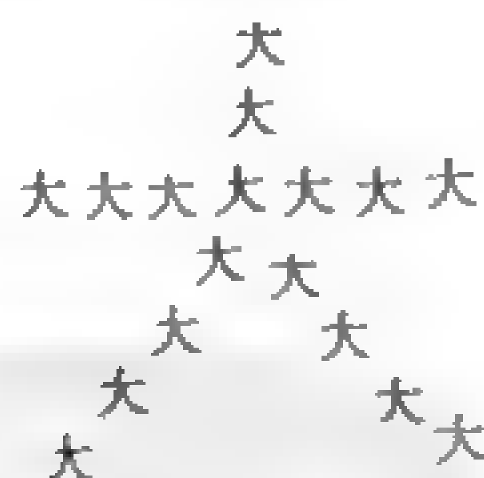


图 5-14

耗散系统混沌的“无限嵌套自相似结构”，在虫口模型的分叉图中看得最为明显。让我们用“高倍显微镜”来观察映象 $x_{n+1}=1-\mu x_n^2$ 从周期运动进入混沌区的过程。我们发现当 $\mu<\mu_\infty=1.40015$

时，主要是一个周期分叉为它的 2^n 正数倍周期，分叉的相同而周期增加；在“深人”到 $\mu>\mu_\infty$ 的混沌区域后，则出现更为复杂的嵌套结构。下面引用我国物理学家郝柏林院士与国外学者 G. Parisi 使用罗马大学马可尼物理研究所用 VAX 计算机绘制的图象加以说明。从图 5-15 中可以明显看出一级分叉序列和嵌在混沌带中的二级序列。这里的 $0<\mu<2, -1<x<1$。

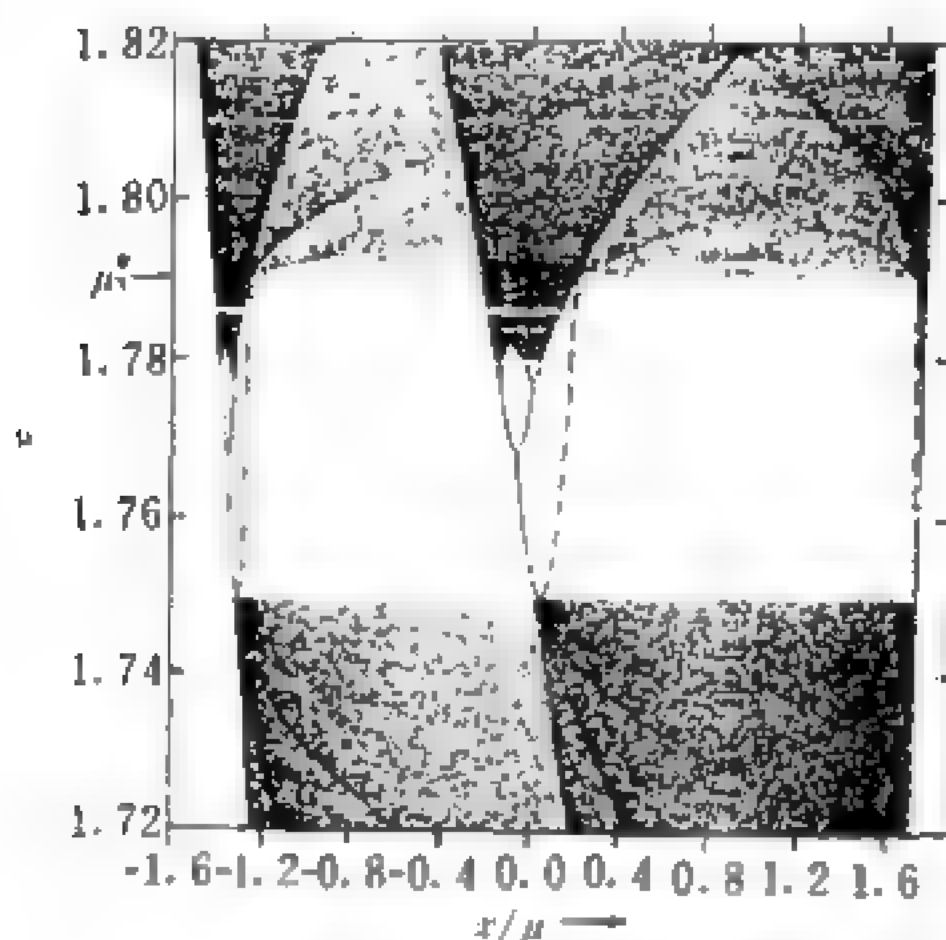


图 5-15

另外，如果不断提高观察的分辨率，就会发现 $\mu>\mu_\infty$ 以后的混沌带并不是一片混乱，而是嵌有许多周期点的“窗口”。其中最明显的是从 $\mu=1.75$ 处开始出现三点周期($3p$)，以后又出现 $6p$，$12p$，…，$3(2)2p$，即 $3m2np$ 类型序列。进一步细看，还会出现 $5m2np$ 序列，$7m2np$ 序列等等，以致无穷多种序列。更为有趣的是，每个这样的序列开始时都有如图 5-15 那样的分叉现象。于是我们看到了与内随机性相关的“无限嵌套自相似几何结构”。

物理学中与混沌相关的也有两个典型的例子，一个是湍流同题，一个是强迫 Brusselator 振子。这两个例子我们都在前面有过讨论，下面看看它们无限嵌套的自相似结构。

例 1. 湍流

湍流与 Benard 不稳定性和 Taylor 不稳定性有密切关系。Lorenz 方程最开始也是试图作为一个湍流的动力学模型而提出来的。后来发现，它对流体湍流是有指导意义，在激光和自旋系统中也许是对的，但并不像原来认为的那样具有普适性。

让我们回忆一下 Benard 稳定性的产生过程。当温度差出现第一个临界点时，垂直方向上的速度场是一个"单模"。它作为一个序参量，"役使"(控制)另两个与温度偏差有关的"模"。为了得到一组三变量的振幅方程，可以先把速度场在垂直方向的分量分解为 Fourier 级数，然后只保留三个运动模式，并进行无量纲化，再作适当的标度变换，就可以得到以下 Lorenz 方程组：

$$
\begin{aligned}
dx/dt &= -\sigma(x-y) \\
dy/dt &= -xz+rx-y \\
dz/dt &= xy-bz
\end{aligned}
\qquad (5.4.1)
$$

式中 $\sigma=r/n'$，是 Prandtl 数，r 是动力粘滞系数，n' 是热传导系数，$r=R/R_C$，R 为 Rayleigh 数，R_c 为临界 Rayleigh 数，$R_C=27\pi4/4$。$R=gah3\Delta T/VK$，g 为重力常数，a 为热膨胀系数、h 为平板间的距离，ΔT 为温度差。

在上述参数中，只有 ΔT 是变化的控制参量，它是 r 的一个因子。通常，取 $b=8/3$，$\sigma=10$(接近水平值)，再改变 r 进行研究。对此，目前已有大量的研究成果，如表 5-2 所示。

和前面的图象相比这里的图象更为复杂。这一方面由于它是在三维相空间中的混沌图象，另一方面湍流的实际过程也远比虫子的繁衍更加复杂。但我们看到，正是在这种复杂的运动中显出了奇妙的自相似性。对分形的研究表明，自然界和社会中的复杂性许多都与这些嵌套着的自相似有关，它们构成了一幅分形的自然图景。

表 5-2

参数 r 的变化范围	解的性质
<1	趋向无对流的定态
1～13.926(r_0)	趋向二个不动点之 ，在(r_0)处出现单稍轨道；
13.926～24.06(r_1)	存在无穷多个周期和混沌轨道；
24.06～24.74(r_2)	出现 个奇怪吸引子，但仍有一对稳定的不动点；
24.74～148.4	混沌区，其中包含许多周期窗口；
99.526～100.79	为一个内嵌的周期序列；
145.9～148.4	为倍周期分叉序列；
148.8～166.7	周期区；
166.07～233.5	混沌区，其中又包含许多周期窗口；
166.07～169	从周期到混沌的阵发过渡；
233.5 附近	与 148.4 附近类似的分叉序列；
233.5～～∞	周期区，由 $\delta=\alpha$ 往下的倍周期序列。

例 2. 强迫 Brusselator 振子

当不含扩散项时周期外力作用下的三分子反应模型即强迫 Brusselator 振子是目前研究得最多也是最有成效的，其方程为：

$$dx/dt=A-(B+1)x+x^2y+\alpha\cos(\omega t) \qquad (5.4.2A)$$

$$dy/dt=Bx-x^2y \qquad (5.4.2B)$$

这是个带自催化步骤的三分子化学反应动力学系统。将它写为耦合振子形式：

$$dx/dt=A-(B+1)x+x^2y+\alpha z \qquad (5.4.3)$$

$$dy/dt=Bx-x^2y$$

$$dz/dt=-\omega u$$

$$du/dt=\omega z$$

此方程不显含时间，是一个自治方程，其中的非线性项为三次(x^2y)。

现固定参数 A、B，取初值 $z(0)=1$，$u(0)=0$，仅考察方程随耦合强度 α 变化时所产生的分叉。

当 α 很小时，意味着耦合很弱，外周期运动不足以影响非线性振子，系统具有两个独立的频率。如果它们是不可约的，则出现“节拍”的现象。

当 α 相当大时，耦合很强，外周期运动起支配作用，使得整个系统完全被“锁”在外频率上。这时系统只有一个周期运动，它是经过另一个分叉序列而达到的。

当 α 不大不小时，两种振动既斗争又合作(协同)，从而产生复杂的分叉和混沌状态。其过程大致如下：当 α 增加到 0.008 时(仍然很小)，系统突然由“节拍”的倍频状态变到“锁频”在分频的状态。开始是“锁”在 $\omega/2$ 的二分频上，然后出现倍周期序列，直到形成混沌带。当 α 增到相当大时，系统完全屈服于外周期振动(见图 5-16，此时取 $\omega=0.08$)。

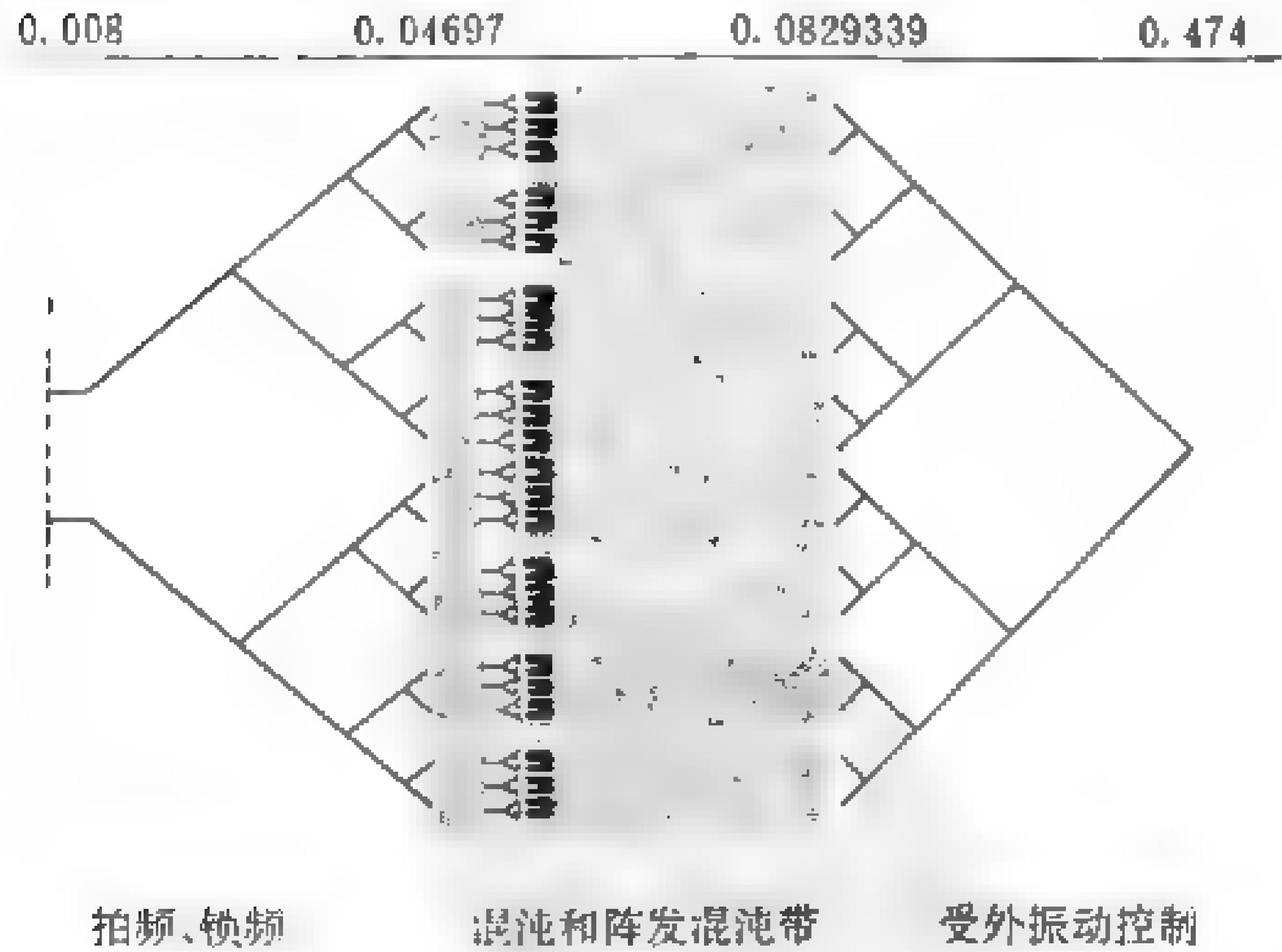


图 5-16

为了进一步分析混沌区内部结构，必须借助于计算机求离散映象。强迫 Brusselator 振子的一个优点是以外频率为控制参数，这就可以运用分频采样法来达到对微分方程计算时所不能达到的高分辨率。在一般的分辨情况下，可发现一级分叉序列和嵌在混沌带中的二级序列。在高分辨时，可以进一步发现二级混沌带中的三级序列，以及三级混沌带中的四级序列(图 5-17)。也就是说混沌不是通常意义上的混沌和无序。另一方面，现在可以严格证明，至少对于若干特定的控制参数，迭代结果的分布具有连续测度。因此，原则上可以认为它们与随机分布没有区别。

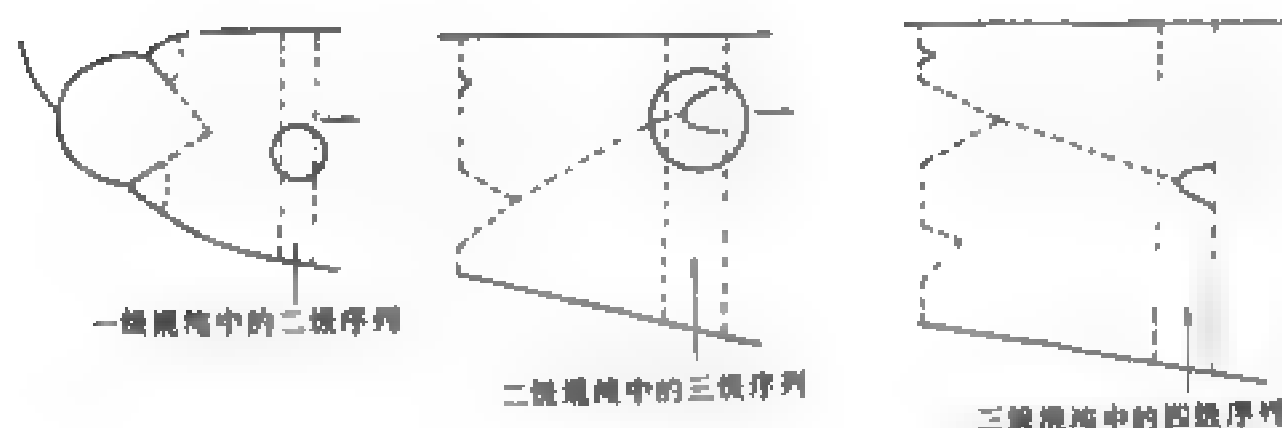


图 5-17

二、普适性与新的自然常数

从上述无限嵌套的自相似几何结构中可以引出哪些普适性呢？美国物理学家 Feigenbaum 等对此进行了艰苦的研究，并发现了一组新的自然常数(下面我们将不局限于 Feigenbaum 的工作)。

1. 标度变换因子[10]

标度律又称为标度不变性。从对一维非线性映象的研究中我们发现了混沌带中具有无限嵌套的自相似几何结构。它表明从一周期($1p$)失稳变到二点周期($2p$)，以致以后出现 $4p$，$8p$，…，$2np$，$3m2np$，$5m2np$，…序列，每一次都经历了一个分叉，而分叉前后的几何图象又是相似的。形象地说，就是分叉后的细节当中一放大倍

数为 α 的放大镜去观察时，看到的几何图象与原来没有分叉前的一样。这实质上等于变动一次测量的“尺子”，得到相同的数据。这种现象称为标度不变性，而放大倍数“α”就是标度变化因子。

Feigenbaum 找到了对于一维单峰映象普适的这个标度变换因子。它是这样定义的：当 $n\to\infty$时，

$$f^{(n+1)}(R_{n+1},x)=-(1/\alpha)f^{(n)}(R_n,-\alpha x) \tag{5.4.4}$$

式中 R_n 与 R_{n+1} 相应于倍周期前后的参数，$f^{(n)}$ 与 $f^{(n+1)}$ 分别对应了第 n 次和第 $n+1$ 次迭代。

$$f^{(n)}=f(\mu,f(\mu\cdots\cdots f(\mu,x)))\cdots\cdots \tag{5.4.5}$$

由 Feigenbaum 计算出 $\alpha=2.502907875$。

α 因子的普适性表现为它并不依赖于 $f(\mu,x)$ 的具体行使，而只与“单峰”有关（这种只与图象的整体形状有关的普适性我们称为拓扑普适性）。

2. 结构普适性和分叉序列的收敛速率

混沌带中的各级分叉序列，最终都要收敛于相应的 μ_∞。Feigenbaum 发现它们的相对收敛速率也是一个普适常数，其普适性仅依赖于迭代函数 $f(\mu,x)$ 的结构。例如对于单峰的迭代函数，极值点附近为二次的，$Z=2$（Z 代表函数的次数），其他还有 $Z=3$，$Z=4$ 以及极值点附近为三角函数的情况。这些都是函数的“结构”。相应于每一类结构的函数，有同一个相对收敛速率，这就是结构普适性。相对收敛速率 δ 为

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n-\mu_{n+1}}{\mu_{n+1}-\mu_{n+2}} \tag{5.4.6}$$

对于 $Z=2$ 的单峰映象，$\delta=4.6692016091029909\cdots\cdots$。

收敛速率所表征的是两个相临的倍周期分叉点之间的距离之比，以及混沌带内周期倍增分叉点之间的距离之比。当 $n\to\infty$时，按 $1/\delta$ 的比例缩小。

对应于迭代函数 f 的不同结构，δ 的值也各不相同。例如在极大值附近为幂指数的 f，计算不同 Z 时的 δ 值：

当 $Z=2$（二次式）时　　　　$\delta_2=4.6692016091029909$

$Z=4$　　时　　$\delta_4=7.284\cdots\cdots$

$Z=6$　　时　　$\delta_6=9.296\cdots\cdots$

$Z=8$　　时　　$\delta_8=10.048\cdots\cdots$

对于非幂指数的情况如 $f=\sin x$ 时，δ 又有不同的数值，因此 δ 又称为结构普适常数。

三、Sarkovskii 定理

对于混沌态内部结构的研究，固然可以借助于比较直观的作图法和计算机数值进行，然而它们所能给出的还只是一些定性的特征。要进一步掌握从有序到混沌的规律，还必须有严格的数学定理。这里，特别重要的是周期轨道的分类和编序问题。

关于周期轨道的分类，主要是区分哪些轨道是稳定的，哪些是不稳定的。所谓稳定周期是指当参数值 μ 固定后取不同的初值 x 迭代，在经过一段过渡的暂态，最后达到同一个稳定的多点周期。而不稳定周期则是指从不同的初值 x 出发，会经历各不相同的无穷序列。这就是前面提到的对初值的敏感性。

其实，关于周期轨道的稳定性问题，数学家们早在一百多年前就有所了解。当时已经知道对某些单峰映象最多只有一个稳定周期。后来发现，1869 年由 H. A. Schwarz 定义的导数

$$Sf(x)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3f''^2(x)}{2f'^2(x)} \tag{5.4.7}$$

取负值可以作为稳定与否的必要性判据。

例如对前面 $Z=2$ 的二次函数型单峰映象，总存在 $f'''(x)=0$，故 $Sf(x)$ 总是为负。计算所得的结果也正反映了这种稳定周期。

但是这只是必要条件而不是充分条件。对于 $Sf(x)<0$ 的情况，也可能有一些 $f(x)$ 连一个周期也没有，"正是这个不充分性才打开了出现混沌轨道的可能性"[4]。

下面再来看一看周期序列问题。所谓周期序列，是指为参数 μ 值固定而初值 x 变化时，各种周期点（包括稳定和不稳定的）出现的先后顺序。在图 5-15 中，固定 $\mu=\mu_0$，随着初值 x 的增大，最先

碰到稳定的8点周期(8p)，接着又碰到4p、2p、1p等不稳定的周期，这就构成了一个8p→4p→2p→1p的序列[6]。如前所述，1974年，李天岩和他的导师Yorke联名发表了题为“周期3蕴涵混沌”的论文。文中认为，如果映象中具有p点，则必定具有一切周期的点，其中包括非周期点。这就是著名的Li-Yorke定理。后来，它又被推广到5,7,…，乃至一切非2^n的周期。这篇论文很快引起了研究混沌的物理学家们的重视。后来发现，Li-Yorke定理实际是Sarkovskii定理的一个特例。

早在60年代，苏联学者Sarkovskii在一篇不太引人注目的论文中给出所谓Sarkovskii序：它的构成法是先自小而大排列除1以外的所有奇数，然后是它们的2倍，2^2倍，2^3，…，2^n倍，最后是由大到小排出2的方幂2^m，m=……3,2,1，即得到如下序列：

3， 5， 7， 9，…

$3\times2,5\times2,7\times2,9\times2,\cdots$

$3\times2^2,5\times2^2,7\times2^2,9\times2^2,\cdots$

$3\times2^n,5\times2^n,7\times2^n,9\times2^n,\cdots$

$2^m,\cdots,32,16,8,4,2,1$，}2^m　m=……3,2,1,0

Sarkovskii定理：如果单峰映象f具有一个周期为p的点，则在上面编序的意义下，它必定对应每个随在p后的q的点。不难看出，Sarkovskii序列可以分为两段，前段对应的是Li-Yorke定理的推广，而后段则对应着反过来的周期倍增序列。

Sarkovskii在1964年证明了上述定理，但其叙述过于艰难繁琐，所以一直没有引起广泛的注意。直到1977年，由于Stefan的介绍，人们才开始认识到它的深刻含义。

Sarkovskii的功绩在于对单峰映象从数学上提出了一个完整的周期序列。它具有很强的普适性。而Li-Yorke的贡献在于明确地预言了非周期轨道的存在，并给出了如第一章第二节所述的关于混沌的数学定理。

Li-Yorke证明，迭代不在极限意义上趋近任何一个周期。可见这是一个有关混沌的存在性定理[6]。不过Li-Yorke虽然证明了

非周期(混沌)的存在,却没有给出所有非周期点的集合是否具有非零的测度。就是说,它也许还只是理论上而非实际上的存在。同时,Sarkovskii 和 Li-Yorke 都没有区分稳定与不稳定周期。

四、普适序列

对于稳定周期,Metropolis、M. L. Stein 和 P. R. Stein 给出了他们三人命名的 MSS 序列[6]。由于它对一切单峰映象具有前面提到的结构普适性,所以又称为普适序列或 v 序列。该序列以单峰映象峰值对应的横坐标为中点,然后观察历次迭代落在中点的哪一边。右边记作 R,左边记为 L。由于已知单峰映象中有一个稳定周期,因此可以以 1 为初值进行迭代,观察 μ 变化对迭代结果的影响。他们三人 *MSS* 列举了周期 11 以内的全部稳定周期的序列。现将周期 7 以内的"普适"序列以及一些说明(其中 $K\mu(1)$ 表示以 R、L 为记号,取初值为 1 时,映象随 μ 的变化情况)列入表 5-3 中。

表 5-3 周期 7 以内的 v 序列[]

序列	周期	$K\mu(1)$	说明
1	2	R	唯一的 $2p$,$2.2n$ 序列开始
2	4	RLR	
3	6	$RLR3$	嵌在 $2I$ 中的 $3p$,二级 $2.3.2n$ 序列开始
4	7	$RLR4$	
5	5	$RLR2$	嵌在 $1I$ 中的 $5p$,二级 $1.5.2n$ 序列开始
6	7	$RLR2LR$	
7	3	RL	唯一的 $3p$,$3.2n$ 序列开始
8	6	$RLR2LR$	
9	7	$RL2RLR$	
10	5	$RL2R$	嵌在 $1I$ 中的 $5p$,另一个二级 $1.5.2n$ 序列开始
11	7	$RL2R3$	
12	6	$RL2R2$	
13	7	$RL2R2L$	
14	4	$RL2$	第二个,也是最后一个 $4p$,$4.2n$ 序列开始
15	7	$RL3RL$	
16	6	$RL3R$	
17	7	$RL3R2$	
18	5	$RL3$	最后一个 $5p$,$5.2n$ 序列开始
19	7	$RL4R$	
20	6	$RL4$	最后一个 $6p$,$6.2n$ 序列开始
21	7	$RL5$	最后一个 $7p$,$7.2n$ 序列开始

(N. Metropolis, M. L. Stein, J. Combina torial Theory, 15, 1973)

表中 $2p,3p,\cdots,7p$ 等表示 $2,3,\cdots,7$ 等周期点，$1I,2I$ 等表示周期为 $1,2,\cdots$ 的混沌带，而 $K\mu(1)$ 的序列，例如序列 5，为 5 周期点(稳定)，$RLR2$ 表示从初值 $1\to R\to L\to R\to R\to 1$ 的变化。MSS 序列的普适性表现在对于不同的物理或数学对象，如化学湍流的非线性微分方程的数值解，以及前面的非线性迭代，只要是单峰的，就具有这种稳定的周期序列。

前面的讨论基本上都是一维离散的映象。从历史上讲它是研究得较早和较透彻的。一维情况的重要性在于它是高维情况的一个缩影。但是一维映象毕竟不能全面地反映真实的高维系统。而二维映象的研究表明，它具有一些一维映象所没有的特征。例如，一维映象对应的都是不可逆的耗散系统，而二维则可以对应保守系统和耗散系统；又如，二维映象的结果可能依赖于初值，对应不同的初值可以在(x,y)平面上划分不同的流域，从不同(初值)流域出发的迭代将收敛于不同的周期或非周期的轨道，而一维映象一般只有一个稳定的周期，即不依赖于初值；再如，二维的情况中具有不同的普适常数，而不像一维情况那样有一个确定的 Feigenbaum 数，等等。

五、非线性常数微分方程中的分叉和混沌

以上对离散情况的研究，固然能为我们提供大量关于混沌的信息，然而人们更熟悉也更感兴趣的则是那些连续的即可以用非线性微分方程描述的情况。大量的数值研究和实验观察表明，可能出现分叉序列和混沌行为常微分方程有三类。

(1) 三个以上变量的自治方程

自治的含义就是方程右端不显含自变量(通常理解为时间)，物理学规律通常都用自治系统来描述。这里要注意的是只有在三个或三个以上自变量的自治方程才能出现分叉与混沌。这个要求来自于微分方程阶的唯一性。

在能出现混沌的自治方程中，最典型的是 Lorenz 模型。它是

由对 Benard 不稳定性研究中引出的，后来经过适当的标度变换，激光也具有类似的形式。此外，等离子体中三个非线性波的耦合方程、双组元流体的 Lorenz 模型、描述流体 Taylor 不稳定性的方程以及描述地磁场随机反向的模型等，也都有与 Lorenz 模型相似的行为。

(2) 非自治方程

由于非自治方程总可以引进新变量来变为自治的(只是变量要增加一)，所以能产生分叉和混沌的应是二个或二个以上自变量的非自治方程。这方面研究得最多的是在周期外力驱动下的强迫振动，即具有周期参数的非线性振子，其中的一个典型是强迫 Brusselator(振子)。

(3) 延时方程

单变量的延时方程可以产生分叉与混沌。这其实不难理解。因为只要把方程中的延时操作写作算子的形式，就可以把延时方程化为多变量的自治方程。最近发现在激光双稳态上出现混沌现象就是一例。

用微分方程来描述系统的行为，是着眼于系统状态的连续变化(轨迹)；用离散映象来描述系统的行为，是着眼于若干代表点上的情况。其实这两种方法是相通的。离散的映象可以看作是一种连续流的"投影"。因此，正如 Poincaré 映象所表明的，它更简明而又不失普通意义。一般地说来，描述某系统如果用一维离散映象，相应的微分方程就要有二维或二维以上。而二维映象则对应三维或三维以上的连续流。总之，离散映象比连续流要少一维。反过来说，如果同为 n 维时，离散映象所包含的内容就要比连续流丰富得多。例如对于一维流形是无混沌可言的，而一维离散映象则可以出现分叉、周期和混沌。

参考文献

[1] 尼科利斯、普里高津．非平衡系统的自组织．北京：科学出版社，1986，24 页

[2] 陈忠,人脑智能系统中的混沌与自组织,1995.10
[3] 郝柏林,从抛物线谈起——混沌动力学,上海:上海科技教育出版社,1993,9页
[4] 陈式刚,映象与混沌,北京:国防工业出版社,1992,16页
[5] 哈肯,高等协同学,北京:科学出版社,1989,28-35页
[6] 郝柏林,分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他,物理学进展,1983,3(3):335
[7] 郝柏林,从抛物线谈起——混沌动力学,上海:上海科技教育出版社,1993,122页
[8] B.-L. Hao, Elamentary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems, World Scientific Press, 1989
[9] 陈式刚,映象与混沌,北京:国防工业出版社,1992,22页
[10] 郝柏林,从抛物线谈起——混沌动力学,上海:上海科技教育出版社,1993,67页
[11] 郝柏林,分叉、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他,物理学进展,1983,3(3):335

第六章　时空混沌与量子混沌

人们对混沌的认识有一个不断拓广和深化的过程。在混沌学发展的初期，人们时常惊喜于混沌现象和一些普适性的发现，随着研究的深入，大家开始认识到混沌现象广泛存在于自然界和人类社会之中，于是转向对现象作定性刻划和定量描述，寻找相应的特征参量，但主要是针对一些简单的情况和典型的事例。接着，人们发现再多找到一个新的混沌现象已经没有什么理论意义，重要的是发现它们中的共性，并通过它们找到混沌发生的机理和控制方法。这样，混沌学的发展又呈现出两个相互关联又相对独立的方向：在理论上深入到一个更广阔更深入的领域；在应用上则着重探讨控制利用混沌的策略途径与具体方法。本章着重讨论混沌学在理论上的发展。

对于混沌研究的发展方向，1988 年初我国著名物理学家郝柏林院士曾提出了一些很有远见的看法，虽然时隔 7 年，仍值得重视。这里摘录如下[1]：

（1）湍流问题仍然是对现代科学的挑战。为了认识真正的湍流发生机制，并且逐步走向完全发达的湍流，必须研究时空混沌行为，即不能限于少数自由度的时间演化。事实上这里存在着整个阶梯：从时间、空间、状态三者都用离散变量代表的“元胞自动机”到三者都变化的连续偏微分方程组，中间可能有各种耦合现象和常微分方程的“格子”。这里需要引入新的概念，也应当借助于并行处理的威力。

（2）以往研究的混沌多属时间的渐远行为，然而过渡过程可能更为重要和丰富多彩。处于物质运动复杂性金字塔顶端的生命现象和社会经济活动，毕竟都是相对于历史而言的过渡过程。经验告诉我们，与时间有关的过程的普适类划分会更细，而且可能需要

引入新的临界指数。

(3) 混沌运动本身应有进一步的分类，奇怪吸引子也会有不同的奇怪程度。混沌吸引子的刻划方法(Lyapunov 指数，各种熵和维数)，目前仍处在研究初期；特别是怎样从实验数据中提取这类特征量，现在尚未完全解决……混沌现象也应当放在复杂系统典型行为的一般背景上研究。

(4) 具体模型的数值研究应当转向分叉和混沌"谱"，即参数空间的整体结构，辅以对各种吸引子其间转变的定量和唯象分析。要综合使用几何(同宿和异宿相交)、测度(熵和维数)、拓扑(符号动力学，旋转数)、分析(周期轨道跟踪技术)、各种手段广泛研究。

(5) 混沌研究要各门学科的合成。一方面要向各行各业普及已经积累的新概念和方法，一方面要使物理工作者创造的种种实际手段在数学上有论证与提高，哲学上也应有新的概括。

郝柏林院士对混沌研究发展方向的建议在近年得到了许多响应，也涌现了一批成果和专著。在本章中我们将循此路线加以介绍和讨论。同时也考虑混沌学的另一重要领域——量子混沌的研究进展。因此，本章主要包括两方面的内容：

1. 时空复杂行为和无穷维动力系统中的混沌

从更广的范围看，混沌是非线性系统复杂行为的一个范例。郝柏林院士建议把"混沌现象放在复杂典型行为的一般背景上研究"，有利于深刻地搞清混沌运动的本质，也丰富了对复杂系统、复杂性态特征规律的认识。然而以非线性相干为核心的复杂问题，远比我们目前研究的混沌困难。它需要对以往的研究大大地加以扩展和发展，而且每一步发展都将面临新的质变和巨大的困难。

这些扩展和发展包括：

(1) 从低维向高维，再向无穷维的发展——无穷维动力学系统中的混沌；

(2) 从状态的时间演化，向空间演变及时空范围研究内的演化——时空混沌。

2. 量子混沌

我们以往研究的混沌有一个基本特征，就是来自确定性的系统，因此又称为确定性系统中的混沌。如果考虑到随机性因素，问题就更复杂了。从研究问题的角度看，我们也可以把随机性分成是来自系统之外的随机扰动，和来自系统内部的非线性相干，而出现了“随机”性。但是还存在另一类随机性，即量子力学系统中的随机性。如果说前面研究的是经典力学系统中的混沌的话，那么人们将会进一步问：在量子系统中的情况又会怎样呢？

量子混沌的问题是一个包含更多未知因素和充满争论的问题。按照郝柏林院士的观点，首先要区分与时间无关和与时间有关的量子系统。对于和时间无关，即 Hamilton 算子不显含时间的量子系统，问题的提法和答案比较清楚，就是经典不可积分的 Hamilton 力学如何量子化。Einstein 早在 1911 年就提出了这个问题。量子化后能级分布如何，等等。关于含时间的量子力学，我们的知识本来十分有限……，“经典混沌”是时间趋向无穷大的“渐远”行为（asymptotic 一词在此当“渐远”比“渐近”好）不能靠量子经典对应移植到量子系统中。对于若干具体的含时间的量子系统（如周期刺激下的量子转子），人们作了大量的数值研究，其结果都表明，所看到的混沌行为是在一定时间范围（或频率区间）内的经典混沌的遗迹，而不是完全的量子效应。正是基于上述认识，许多专家认为根本就不存在什么“量子混沌”。但是问题并不就此了结，不少学者仍在思考，量子混沌的存在性与经典混沌的关系。这方面的研究构成了混沌学中一个似乎不太协调的部分。我们在本章中将适当介绍这方面的研究动向和进展。

第一节　一维耦合映象格子

对于由常微分方程描述的少自由度系统，可以通过取 Poincaré 截面的方法，来将其化为映象系统。尽管这些系统可能非常复杂，但却普遍存在二次极值，即部分地包括了单峰映射。我们前面通过对单峰映射的研究揭示了许多混沌的共性，从中发现了

倍周期分叉，及其标度规律。这一成功的范例使我们希望在研究无穷维动力系统中的混沌时，再次加以利用。如利用耦合映象格子模型(CML)，并在此基础上对系统的时空复杂行为，包括混沌，进行描述和讨论。

一、几种时空系统模型的比较[2]

在正式引人 CML 之前，我们先对时空系统复杂行为的几种常用模型作一个比较。

对于无穷维动力系统的研究，总是要进行相应的简化。简化方法主要是将连续变量离散化和对无穷维系统进行截断。无穷维系统的变量包括三类：空间变量、时间变量、状态变量，对它们的离散化可以分别进行。我们可以按离散化对四种常用的研究方法进行分类(见表 6-1)。

表 6-1

模型类型	空间变量	时间变量	状态变量
偏微分方程 PED	连续	连续	连续
耦合常微分方程 COED	离散	连续	连续
耦合映象格子 CML	离散	离散	连续
元胞自动机 CA	离散	离散	离散

在这四类模型中，无疑偏微分方程(PED)最接近真实情况。但尽管人们对 PED 研究了数百年，但却只能对极少数几个线性 PED 方程的通解有较好的认识，而对绝大多数 PED 可以说基本上还不了解，因而就更不用说刻划时空复杂行为的 PED 了，这些 PED 几乎都是非线性。这就使人对它们几乎无法下手，找不到正确的入门点。

在四类中最简单的也许算是元胞自动机(CA)了，因为它对三类参量都进行离散化。CA 的概念和模型早在 50 年代就由大数学家 Von Neumann 所提出。当时人们已经明白这是对复杂行为进行简化的有力方法，可惜由于当时计算机的功能限制，长期进展缓慢。直到 1984 年，美国物理学家 S. Wolfram 发表他的著名论文

《Computation theory of Cellular automata》后，CA 方法才有了长足的进展。用 CA 模型研究时空复杂行为，在于它的模拟计算效率高，用计算机定点计算速率往往大大高于浮点计算。但问题在于它的离散化状态(场变量)较适用于微观变量，而对宏观变量的适用性较差。因此，在描述系统的宏观行为时，CA 需要取很大的格子数，这样一来，它的模拟效率高的优势就被抵消了。此外，由于 CA 对时间空间和状态都进行了离散化，使我们很难观察到系统随参数微小变化所引起的巨大变化，这对研究系统的时空混沌问题是不利的。

在余下的两类模型中耦合常微分方程仅对空间变量离散化，保持了时间和状态。但一般认为这样对研究时空复杂行为仍过于复杂，既不利于数值模拟，也不利于理论分析。在排除了上述三类之后，我们选取了耦合映象格子，简称 CML。这样作是因为它具有如下的特点和优点：

(1) CML 是对时空系统的半宏观描述，因而数值模拟计算的效率高；

(2) 整个计算过程的并行程度很好，可以直接并行化。由于各格点计算的过程完全相同，并行计算中相邻处理机之间几乎没有相互等待时间，因而特别适合并行计算；

(3) 由于具有计算效率高的特点，使我们可以通过对参数空间的描述来得到当参数变化时各种时空行为相互转化的规律，甚至得到整个参数空间的相图，从而可以对不同类型的行为模式作细致的探讨；

(4) 很容易将人们在低维系统研究中所得到的成果，直接推广到无穷维系统的研究中，其中包括对混沌和复杂性研究很有用的 Lyapunov 数的概念和信息熵的概念等等；

(5) 由于系统的演化过程在模型中被分解为一些按顺序进行的简单过程，因此对解析解的分析比偏微分方程容易得多。

二、CML(耦合映象格子模型)的建立

CML 最初是由日本学者金子邦彦(K. Kaneko)[3]在 1983 年

提出来的，近年来在时空混沌的研究中引起了广泛的注意。由于许多工作都集中在如下一个以单峰映象 $f(x)=1-ax^2$ 为基础的模型中：

$$x_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)f(x_n(i))+\frac{\varepsilon}{2}[f(x_n(i-1))+f(x_n(i+1))] \tag{6.1.1}$$

故又称为耦合单峰格子(Coupled Logistic Lattices)。

CML 的建立过程如下：

第一步，根据研究对象的宏观物理性质，拓扑结构和维数在一个网上选取一些状态(场)变量，如物体的温度、流体的流速(率)、物质的浓度等。

第二步，将影响系统发展过程的量分解成一系列相对独立的分量，如对流、反应、扩散等等。

第三步，用网格上简单的并行动力学过程来表达(代替)每个独立过程的分量。即① 每个网格点上场变量的并行非线性映象；② 某些特定邻近点状态的相互耦合发展；③ 或上述两个过程独立发展现象。

第四步，让各个独立过程分量按顺序发展变化，完成一个时间单位的演化。

例如，对耗散结构理论和化学中常见的反应扩散方程：

$$\partial U=F(U)+\varepsilon\nabla^2 U \tag{6.1.2}$$

我们可以将它分解为反应过程(局部动力学过程)和扩散过程两个部分。而整个反应扩散过程所产生的时空复杂行为都是这两部分协同与竞争的结果。

为简单起见，我们这里先只考虑一维空间和周期性边界条件。用一个非线性映象 $X(i)\to X'(i)=f(X(i))$ 表示局部反映过程，其中 X 为系统状态，它是连续的，i 为格点坐标($i=1,2,\cdots,L$)，它为离散的。L 是系统的尺寸大小。

用一个离散的拉普拉斯算子来表示扩散过程：

$$X'(i)\to(1-\varepsilon)X'(i)+(\varepsilon/2)[X'(i+1)+X'(i-1)] \tag{6.1.3}$$

这样就得到了耦合映象格子模型(Coupled map lattice),简称CML模型。

$$X_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)f(X_n(i))+(\varepsilon/2)[f(X_n(i+1))+f(X_n(i-1))] \quad (6.1.4)$$

其中 n 表示离散化后的时间,周期性边界条件用 $X_n(0)=X_n(L)$ 表示。

从模型的建立中可以看出,CML模型是一个时间、空间离散,状态连续的动力学系统。

如果模型中的函数 $f(X(i))$ 为一单峰映象:

$$X'(i)=f(X(i))=1-\mu X^2(i) \quad (6.1.5)$$

则模型变为耦合单峰映象格子模型(Coupled logistic lattices)。简称CLL模型。由于单峰映象是我们在研究低维混沌系统时所熟悉的,其中许多概念和结论可以借用到无穷维动力系统的研究中来,故以下的讨论将以它为基础。

第二节 耦合单峰映象格子模型(CLL)的时空行为

从图6.1的相图中,我们可以看出随着非线性参数 a 的逐步扩大,单峰映象格子模型的时空行为可以呈现出6种运动模式,它们分别对应图中的不同区域:[4]

Ⅰ区:冻结化随机图案模式(frozen random pattern);

Ⅱ区:图案选择模式(pattern selection);

Ⅲ区:缺隔混沌模式(defect chaotic diffusion);

Ⅳ区:缺隔湍流模式(defect turbulence);

Ⅴ区:图案竞争阵发混沌模式(pattern competition intermittency);

Ⅵ区:完全发展湍流模式(fully developed turbulence)。

为了进一步讨论这6种模式,我们可以构造两种变化图。一种是空间振幅图(space-amplitude plot)以状态值为纵坐标,以空间

位置为横坐标，每一幅图所表现的是在某一时间(步)上系统空间状态函数的全部迭加，我们可以通过读出多幅这样的图看出各格点状态随时间的变化。另一种是时空行为发展图(space-time diagram)，它分别以时间和空间作纵横坐标轴，反映一些图案结构在空间的传播形为。其方法是对每一个时空点的状态都进行判别，依判别的结果来着色。例如将大于单个映象的不稳定不动点 $x^*=(\sqrt{4a+1}-1)/2a$ 涂黑，反之为白。

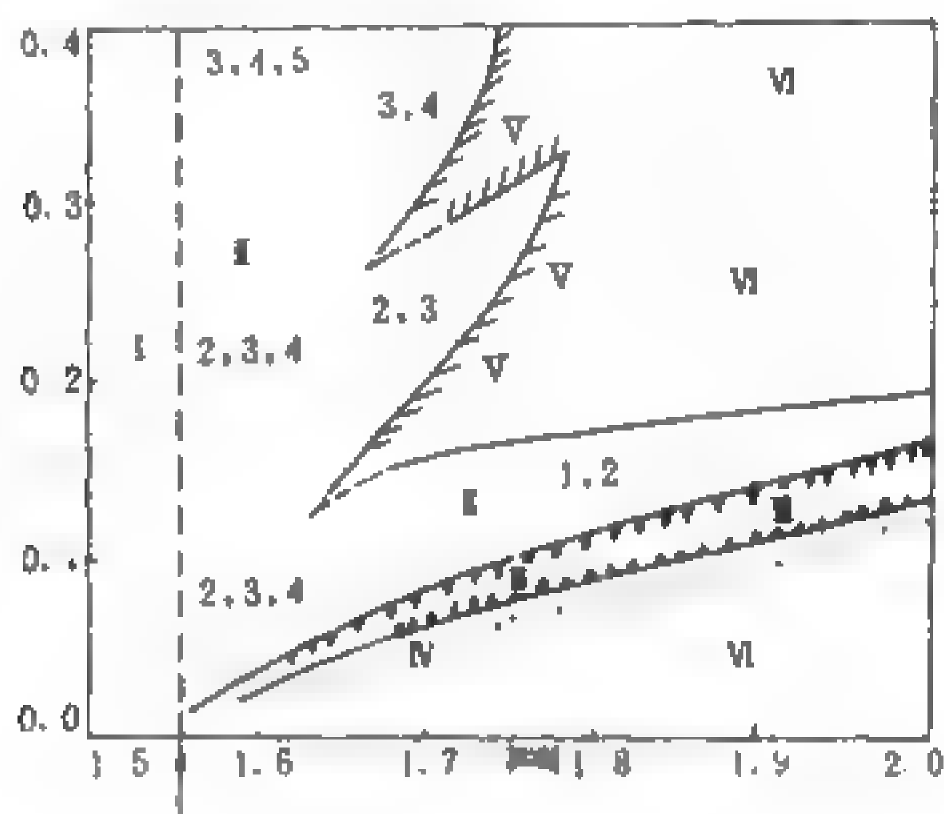


图 6-1 相图

1. 冻结化随机图案模式(FRP)

(1) 当 $a\leqslant 0.75$ 时，单个单峰映射只有一个周期解，单峰映象格子模型的行为也是平庸的，即所有格点的状态都落在单峰映射的不动点 $x^*=(\sqrt{4a+1}-1)/2a$。

(2) 当 $a>0.75$ 时，单个单峰映射出现倍周期分叉，单峰映象格子模型出现扭结和反扭结，开始扭结的位置随初始条件的不同而不同。如果初始条件的选取是随机的，那么扭结的位置也是随机的。但在经过一段过渡后，扭结的位置就不再变化了。

由于扭结的"屏蔽"作用使扭结两边的行为互不相关，因而扭

结实际上将空间分成一些互不相关的区域，而区域的位置和尺寸的分布则完全取决于初始条件。[5]图 6-2 中 $\epsilon=0.2$，$a=0.9$。

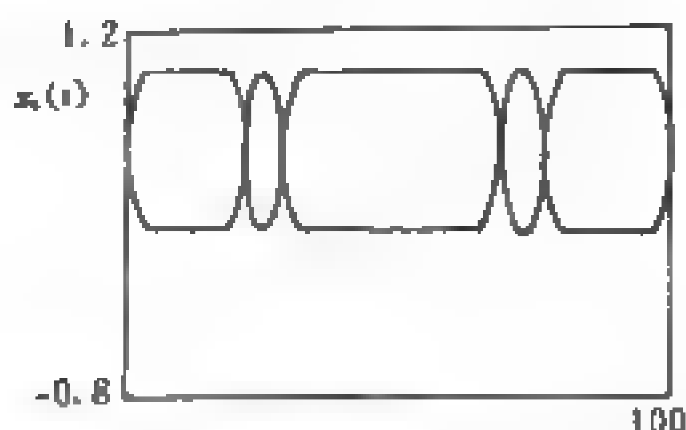


图 6-2

(3) 当 a 进一步增大，单个单峰映射的行为越来越复杂，各个区域中格点状态的行为也出现各种 $2i$ 周期行为。

(4) 当 a 大于 Feigenbaum 累积点(cummulating point)以后，即单个单峰映射可能出现混沌解时，在一些大空间尺度的区域内，格点状态也出现了混沌行为。但同时在一些小的区域内部可以是保持周期性变化，如周期 8，周期 4，以至周期 2。这说明格点状态与大小有很大的关系。同时由于单峰映象格子模型是一个多吸引子系统，吸引子的个数也会随系统空间尺度的变大而呈指数性增大。

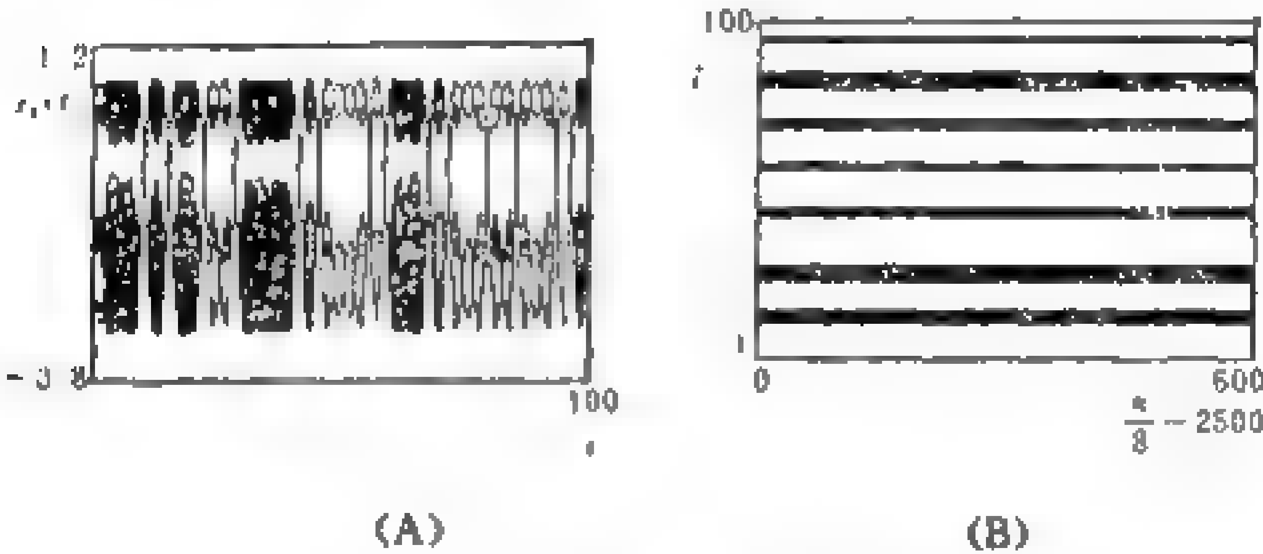
例如当 $\epsilon=0.15$，$a=1.52$ 时我们可以得到相应的空间振幅变化图 6-3(A)和时空行为发展图 6-3(B)。从图 6-3(B)中可以看出：各区域的边界(即扭结位置)仍不随时间变化，故称此类模式为"冻结化"随机图案。但这种情况只能保持在非线性参数 $a\leqslant1.52$ 的范围内，就是说"冻结"大致在 $a=1.52$ 时结束，此后就将变为其他模式。

而 $a=1.52$ 时，正好是单峰映射的二带混沌到一带混沌的并合点。

2. 图案选择模式[6]

图案选择模式中原来在"冻结"模式中的那种大区域混沌强，小区域保持周期性的趋势会进一步发展。其表现是在所有区域中

仅有特定大小尺寸的区域(一般是小区域)能保持稳定,其他大小的区域则被这些特定尺寸的区域所取代(可以称为被它们所俘获、同化),而且当非线性强度参量 a 逐步增大时,那些保持稳定的特定区域会个数减小,而它们每一个的范围(区域)会扩大。



(A)　　(B)

图 6-3

我们可以这样理解上面的"选择"或"抑制"现象。由于系统中存在扩散过程和反应过程(即局部动力学),它们构成相互竞争的局面。一方面由于扩散而使系统趋向均匀化,当扩散系统 ε 增大时,除特定的区域继续保持稳定,并不断扩大它的"势力范围"外,其他小尺寸的区域的稳定也将被它们破坏。与此同时,另一方面由于局部动力学过程而导致的混沌,使原来的大尺寸区域不断"撕裂";在小尺寸区域中,由于混沌被抑制而没有撕裂行为,使得它们得以保留。相比之下,在"冻结"模式中,这种"撕裂"行为混沌带存在距离而不能发生。

上述的扩散、撕裂过程仅仅发生在开始一段时间内。当选择过程完成之后,系统所有区域的尺寸和位置都会被固定下来,不再随时间变化。

3. 缺陷混沌扩散模式

随着非线性强度 a 的进一步增加,状态对初始值敏感性也变得很强。在原来的"选择"模式上又出现了新的变化,那就是出现

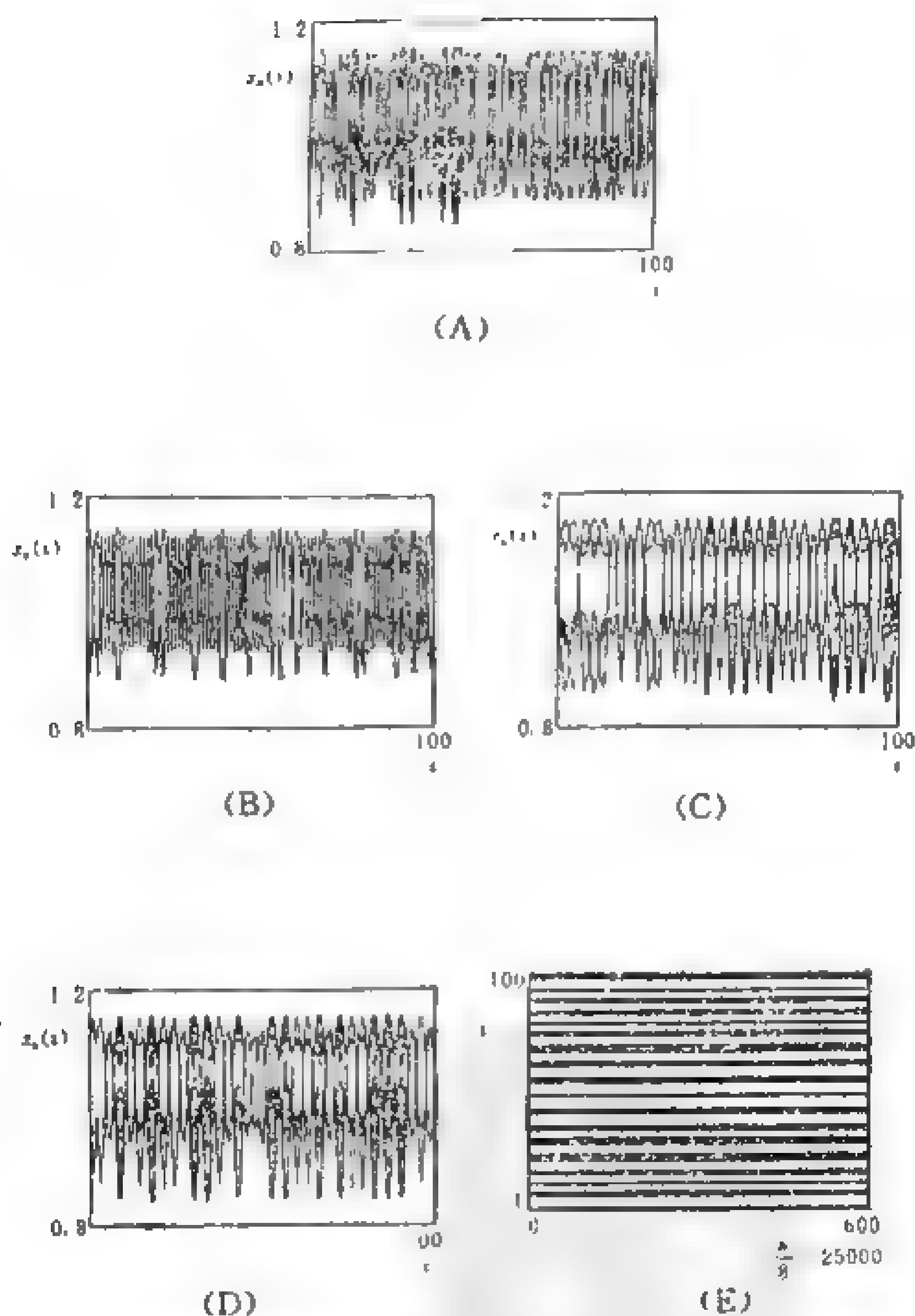
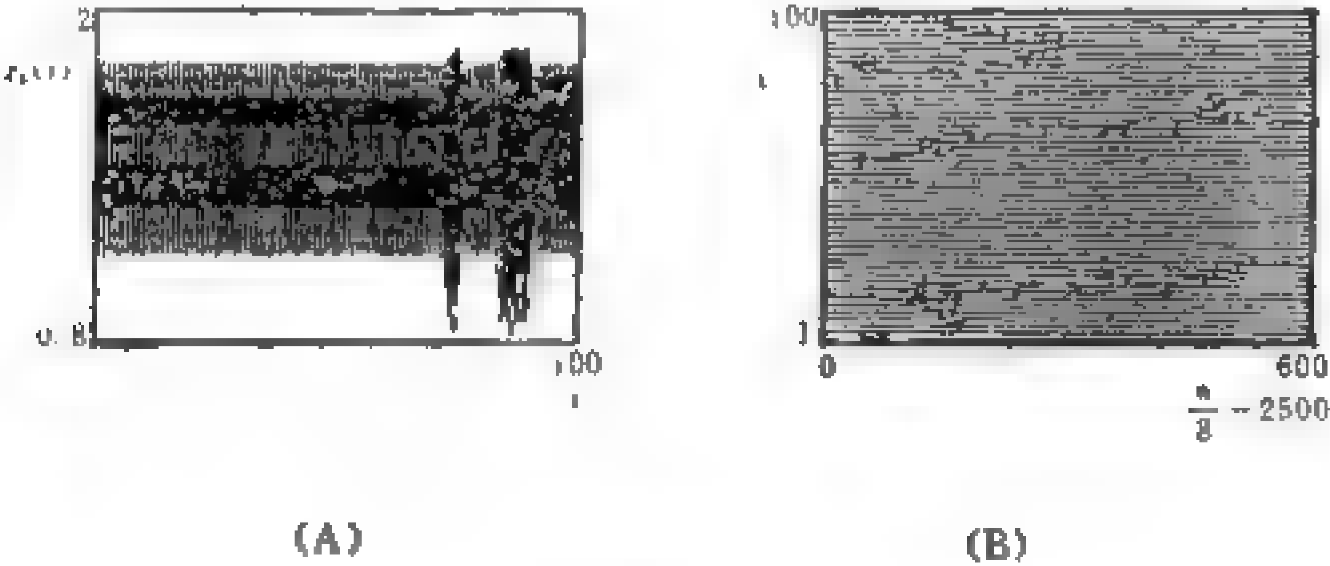


图 6-4

"缺陷"。所谓缺陷，是指两个相互"错"了一个空间周期的区间之间所出现的"局部混沌"。从图 6-5 中可见，缺陷是空间局域化的。但形状却随机变化，并且随机"行走"。如果它与另一个缺陷相撞，就

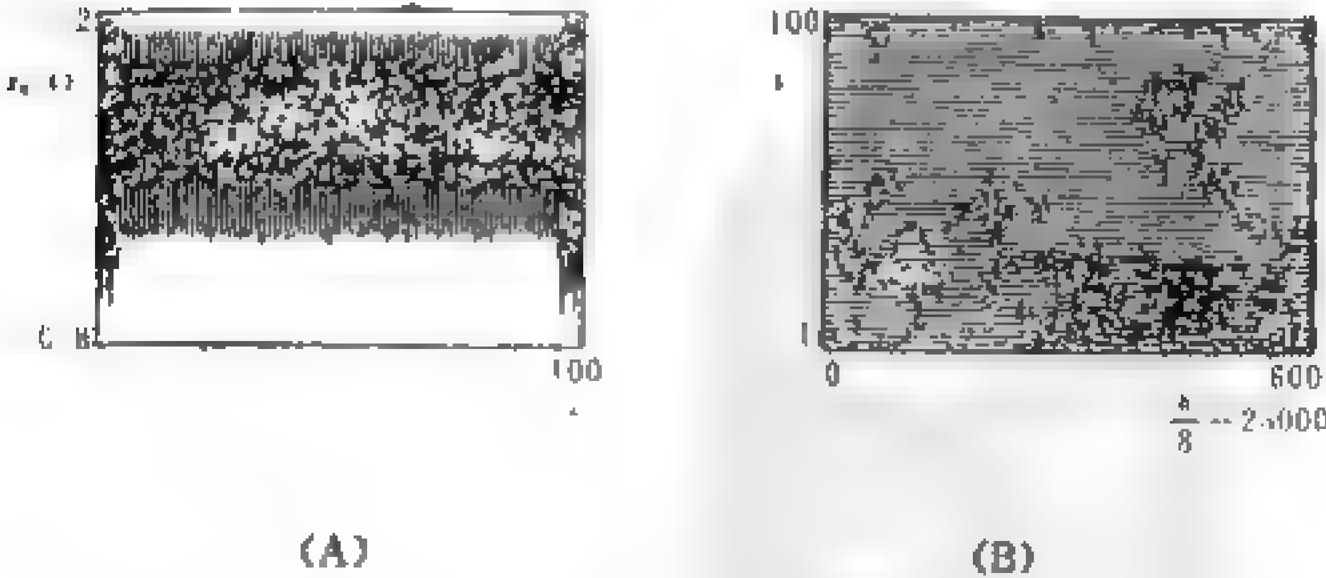
会相互湮灭。因为缺陷不能成对产生，在具有偶数个格子的系统中，所有的缺陷最终将会成对湮灭，而且有奇数个格子的系统中，总会有至少一个缺陷在空间游荡。在没有缺陷的地方，空间将被锯齿形图案所覆盖，因为这时的区域选择个数为 1，区域尺寸为 1，空间周期为 2。



(A)　　(B)

图 6-5

4. 缺陷湍流模式[7]



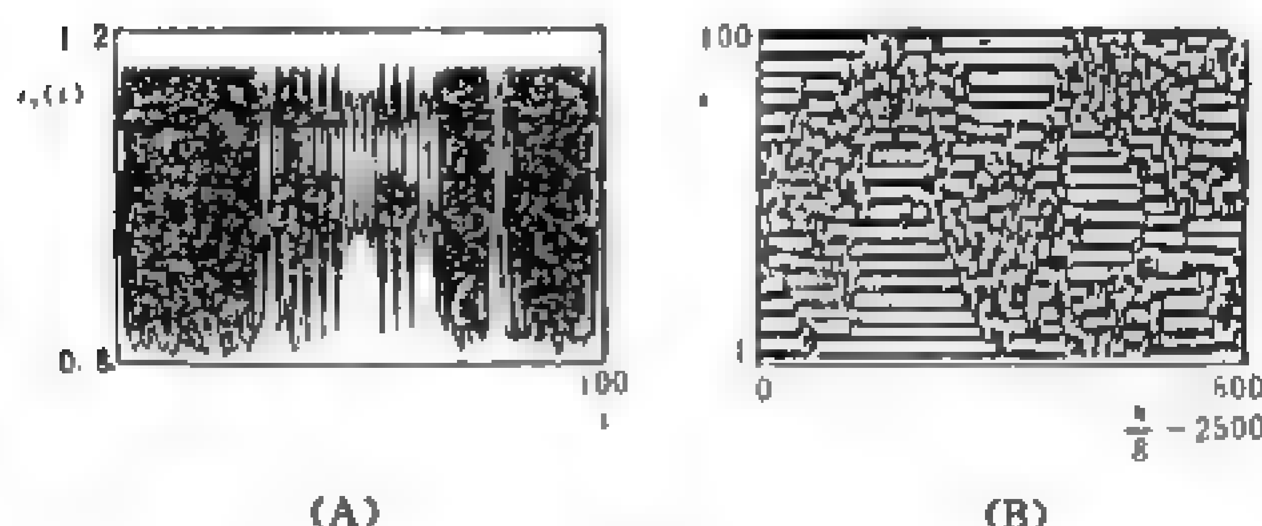
(A)　　(B)

图 6-6

当 a 再进一步加大时，缺陷混沌模式中的锯齿形图案将失去稳定，而出现“自发缺陷”，其结果是缺陷可以成对产生。这就从混沌模式进入了湍流模式。在此模式中，缺陷不仅成对产生，而且会

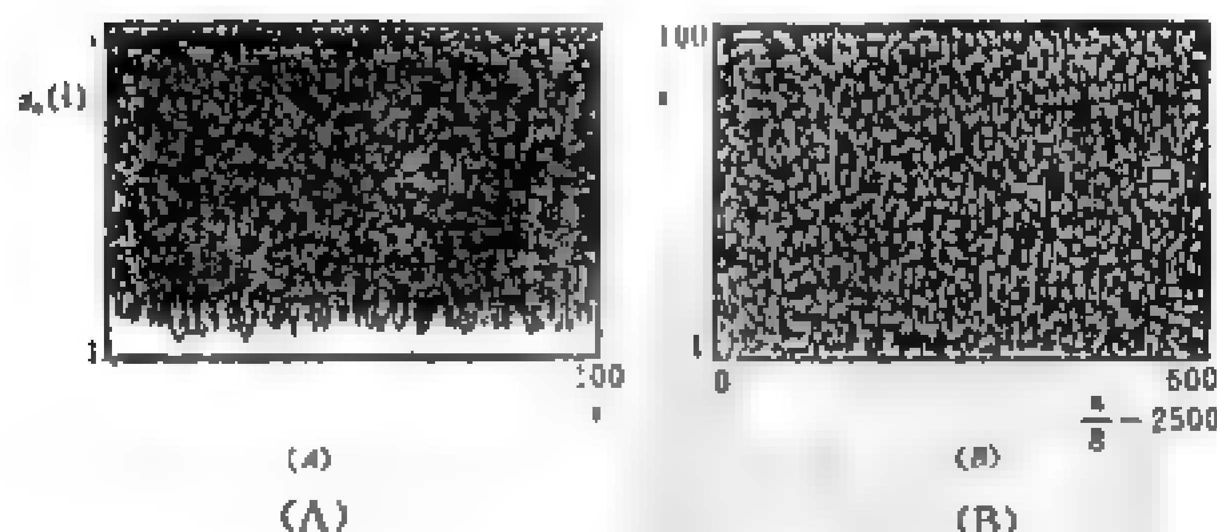
因相互碰撞而使缺陷个数增加(即不单有湮灭的情况,也有产生的情况)。我们可以认为,缺陷的这种成对产生是局部动力学中发生"危机"的结果,而空间耦合又诱导了这种危机现象在格点上的传播。

5. 图样竞争阵发混沌模式[8]



(A) (B)

图 6-7



(A) (B)

图 6-8

在"选择"模式的基础上,进一步增大 a 值,还会产生另一种不同于"缺陷混沌扩散"的新的模式,那就是阵发混沌模式。它具体表现为周期空间图样相位的错位引起局部混沌,即出现阵发混沌。但它的空间尺寸远比"缺陷"大。其特征是存在多个稳定图样,并且各

图样间通过阵发行为来转换。因此它是一种具有长程关联的运动模式。

在这种模式中各图样自身保持稳定，但各个区域之间的相位会产生爆发式的“错动”。

6. 完全发展的湍流模式：

当 a 增加到很大时，整个失控中将很难看出任何有序行为，此时称为完全发展的湍流模式。在此模式中扩散的有序化趋势，被局部混沌的非均匀趋势所“压倒”，混沌占了上风。因此可以近似地认为存在一个时空变换下不变的连续状态分布。

第三节 时空行为的定量刻划

前面我们对 CML 的时空行为进行定性的刻划，为了对各种模式的特征及相应模式中不同式样间的差异进行更深刻的研究，需要对它进行定量描述。

经常用来对 CML 时空行为进行定量描述的方法有功率谱分析，图样复杂性分析，Lyapunov 指数分析，信息量分析，这些都是研究时空混沌时行之有效的方法。在前面都有所涉及，这里只讨论它们在用于 CML 分析时的新发展和新特点。

一、功率谱分析[8]

功率谱分析的原意是用 Fourier 算法和频谱分析仪器，对非随机性的运动进行特征时间尺度和频率结构分析。在对时空行为进行功率谱分析时包括空间功率谱分析，时间功率谱分析。它们分别定义如下：

空间功率谱

$$S(k)=\left\langle\left\langle\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_n(j)e^{2\pi i k j}\right|^2\right\rangle\right\rangle \tag{6.3.1}$$

其中《 》表示对时空的平均。

时空功率谱

$$P(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{1}{t_1}\sum_{n=1}^{t_1}x_{t_0+n}(j)e^{-2\pi i\omega n}\right|^2 \tag{6.3.2}$$

空间时间功率谱

$$P(k,\omega)=\left\langle\left\langle\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=t_1}^{t_2}x_n(j)e^{2\pi i(jk-n\omega)}\right|^2\right\rangle\right\rangle \tag{6.3.3}$$

在这三个功率谱中只有空间功率谱用得最多。从图 6-9、6-10 的 6 张图中我们可以看出六个不同模式在空间功率谱上的不同表现。

在“冻结”模式中，$\epsilon=0.2$，$a=1.52$。图中出现的许多尖峰表示，允许多种运动模式出现。

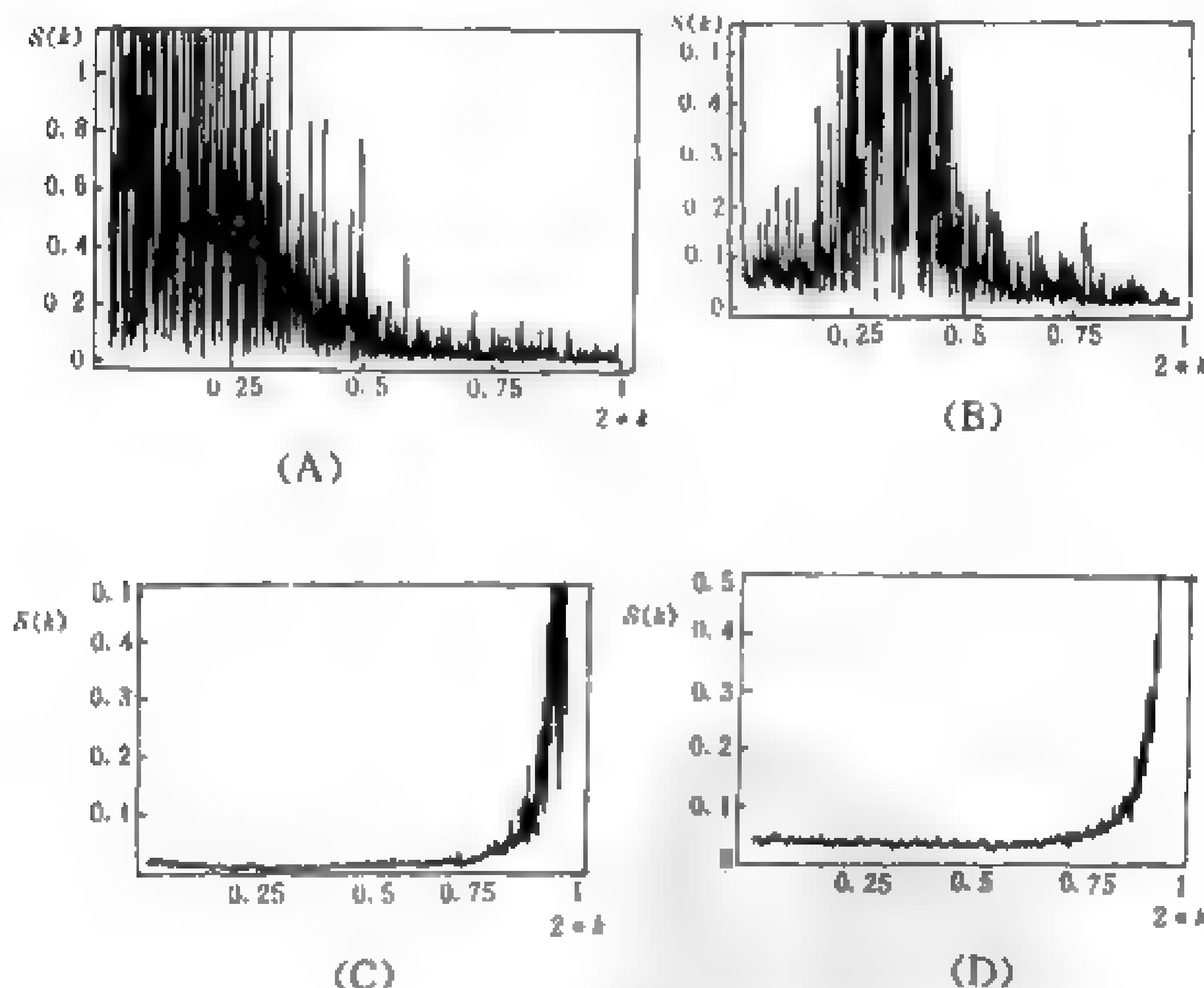


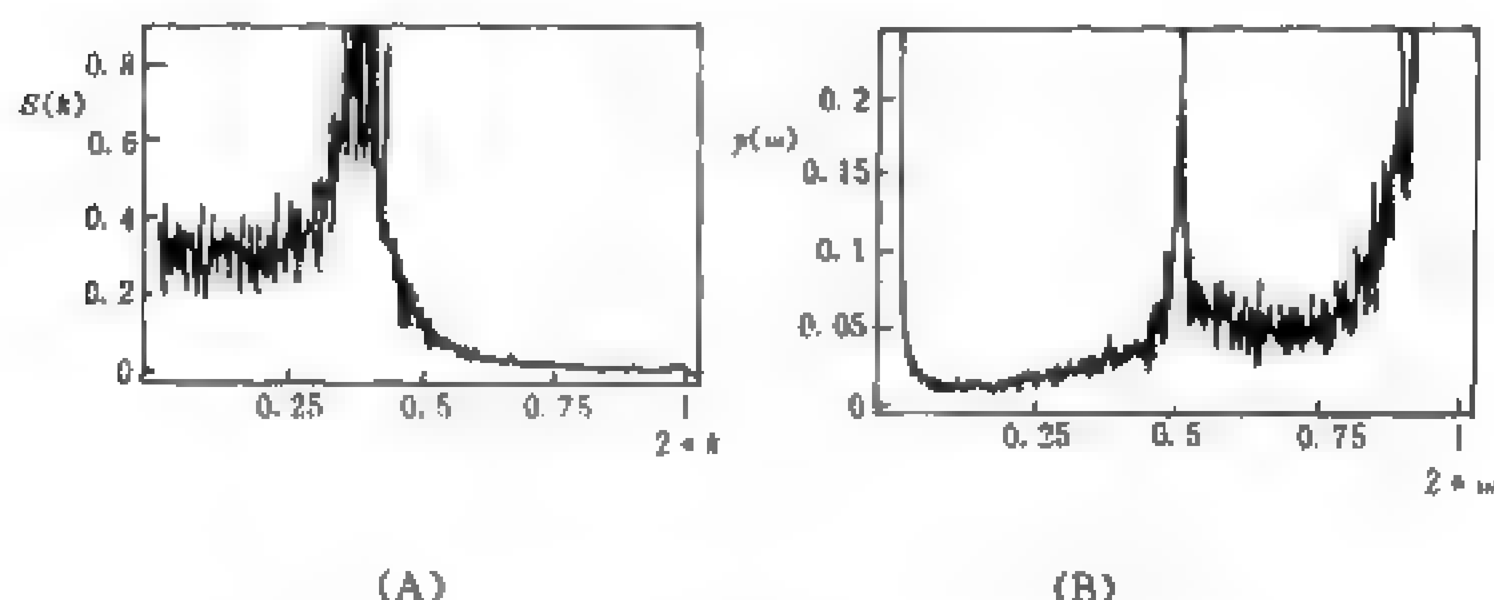
图 6-9

在“选择”模式中 $\epsilon=0.3$，$a=1.66$。尖峰个数大为减少，仅有少数几个能保持稳定。

在“缺陷混沌”模式中 $\epsilon=0.1$，$a=1.79$。和“缺陷湍流”模式中 $\epsilon=0.1$，$a=1.885$ 一样都是在 $2^*k=1$ 处有一个尖峰，并有一个宽带噪声谱，两者的区别在于宽带强弱不同。

在竞争阵发混沌模式中 $\varepsilon=0.3,a=1.9$。功率谱中的尖峰完全消失。$S(k)$随 k 的增加而单调减少，并且 $S(k)\propto e^{(-const\times k^2)}$。这是由于 CLL 模型中空间耦合项是扩散项的原因。

图 6 10 是图样竞争阵发混沌中的两张时间功率谱。从图中可以看出在此模式下不同 ε,a 对功率谱的影响。



(A)　　　　(B)

图 6-10

图(A)　$\varepsilon=0.3,a=1.775$,图(B)　$\varepsilon=0.4,a=1.75$

二、图案复杂性分析

研究系统的复杂性态是非线性科学和系统科学的一个重要方面，因为系统的复杂性不仅与系统自身的许多重要性质相关，也与人们认识和利用它有关。但是直至现在人们对复杂性态的认识还非常少，以致对复杂性的定义都很不统一，更不用说给复杂性以定量的刻划了。但是这并不意味着我们对此无所作为。在对 CML 时空复杂性的研究中，人们提出几个复杂性的“量”。尽管并不完善，对它们的意义也不太清晰，但它们的确能明显地表现出运动图形的某些转变。

我们知道 CML 模型的特点是时空离散，状态连续。为了定量刻划图样的复杂性，我们还得把原来连续的状态变量 $x_n(i)$离散化，并用一个符号集合来表达这些离散的状态。这样就可以把空间图案转化为一个符号图。

设系统在 n 时刻，i 格点(空间位置)上的状态为 $x_n(i)$。显然，

由于初始边界条件控制参量等的不同，$x_n(i)$会在一定范围内连续变化。例如在$[x_0, x_k]$之间变化。现在我们对状态离散化，并赋与每一个分立态$\sigma_n(i)$以一个符号：$[0,1,\cdots,k]$

当 $x_n(i) \leqslant x_0$ 时，$\sigma_n(i)=0$

当 $x_0 < x_n(i) \leqslant x_1$ 时，$\sigma_n(i)=1$

…… ……

当 $x_{k-1} < x_n(i)$时，$\sigma_n(i)=k$

这实际上是将状态变化区间$[x_0, x_k]$划分为k个小区域，并赋予每个小区间一个相应的符号。显然最简单的情况是$k=1$，即将变化区间分为两个部分，分别赋于0,1两个符号。

通常我们设$x_0=x^*=(\sqrt{4a-1}-1)/2a$为单峰映射周期$i$不动点，如

$\sigma_n(i)=0$ 时，$x_n(i) \leqslant x_0$

$\sigma_n(i)=1$ 时，$x_n(i) > x_0$

这样一来就可以得到一个用[0,1]符号序列表示的图案。

例如在n时刻，i位置(空间)附近的符号序列为：

i

……100 0110100011100101000111110110……

在$n+m$时刻，i位置附近的符号序列为：

i

……0011010001100011010111011100011……

对此一定范围内连续变化，例如在$[x, x_k]$先定义一个图案(Pattern)动力学的序参量$Q(j)$，它表示某个长度为j的相同符号串(如0,0,0或1,1)的概率分布j。在图6-10中，n时刻i位置上符号为0，相同符号串为0,0,0，$j=3$，$Q(j)$就是整个序列中符号串“0,0,0”出现的概率分布。

有了$Q(j)$，我们就可以分别求出：

(1) 静态图案熵(Static pattern entropy)

$$S_p=-\sum_j Q(j)\log Q(j) \qquad (6.3.4)$$

它是相对于某个时刻n而言的空间图案复杂度。

(2) 图案动态熵(Pattern dynamical entropy)

$$S_p = -\sum_{i,j} Q(j) T(i \to j) \log T(i \to j) \qquad (6.3.5)$$

它是相对于经过某一段时间 i 位置相同符号串长度变化的"图样转移矩阵"而言的。该图样转移矩阵定义为：如果 n 时刻 i 格点周围相同符号的空间长度为 m，经过某一段时间后变到相同符号为空间长度为 k 的事件发生 $T(m \to k)$。

显然，当空间图案复杂时，$S_p > 0$，当图案不随时间变化时 $S_d = 0$。当图案的形状不依赖于过去的图案，即图案变化没有"记忆"时，图案的动态行为就是无序的。此时 $T(i-j) = Q(j)$，即得到：$S_p = S_d$。

运用图案动态熵来研究图案从"冻结"到"运动"的转化是十分有用的。从图 6-12 中可以明显地看到这个"转化点"。

图 6-11

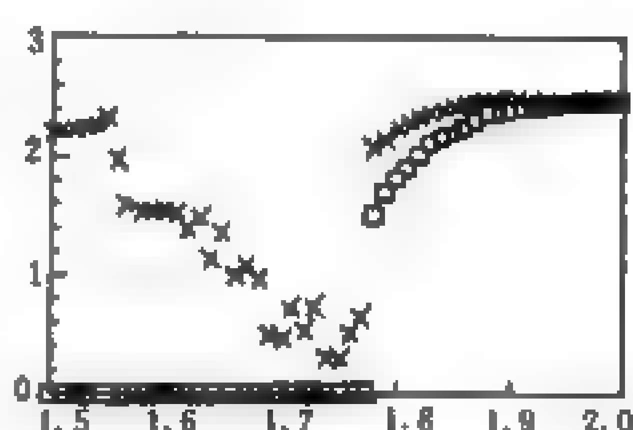


图 6-12

(3) 缺陷扩散系数

对于存在缺陷的模式，缺陷的游动、湮灭、产生和扩散是它们的特征。这时，缺陷扩散系数是一个重要的参量。它的算法是对具有奇数格点的格子(偶数的可能因成对湮灭而出现完全没有缺陷的情况)。设初始的锯齿图案上加入一个缺陷，记下 n 时刻缺陷的位置 I_n，将所得数据用下式拟合：

$$\langle (I_n - I_0)^2 \rangle = 2D_n \qquad (6.3.6)$$

其中 D 为缺陷扩散系数，$\langle \cdots \rangle$ 表示对系统求平均。数值计算表明 D 会随非线性强度参数 a 的增大而增大。

三、Lyapunov 分析

在对时间混沌的定量刻划中，Lyapunov 指数(简称 L 指数)占有极重要的地位。由于它描述了轨道发生微小偏离后偏离被放大的情况，因此通常情况下可以认为混沌运动具有正的 L 指数。

从 L 指数的定义可知，对于 N 维动力系统存在 N 个独立方向，也就存在 N 个本征值。它们给出了 N 维动力系统的 L 指数谱。在对时空复杂行为和时空混沌的刻划中，L 指数及其相关的量同样十分重要。下面主要介绍最大 L 指数，K_S 熵密度和 L 分维。

对于一维映象 $f(x)$ 在 n 时刻状态 x_n 处的 L 指数为

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log|f'(x_n)| \tag{6.3.7}$$

对于 CML 系统，我们有 $dX_{(n+1)}=A^{(n)}dX_{(n)}$，其中 $dX=(dx_n(1),dx_n(2),\cdots,dx_n(L))^T$，其中 L 为格子尺寸，$A(n)$ 是一个 L^*L 矩阵。我们将所有的 $A^{(n)}$ 乘在一起，令 $A^{(n)}=A(n)A(n-1)\cdots A(1)$。通过 $A^{(n)}$ 矩阵的 l 个本征值 $r_N^{(i)}$ 可以计算 CML 的 L 个 L 指数 $\lambda_i=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log r_N^i$，其中 $i=1,\cdots,L$。

将所有的 L 指数从大到小进行排列，就可以得到 L 指数谱，其中最大的一个对于刻划时空复杂行为和时空混沌是具有十分重要的意义。

研究发现对于绝大多数微扰，最大 L 指数可以由下式给出：

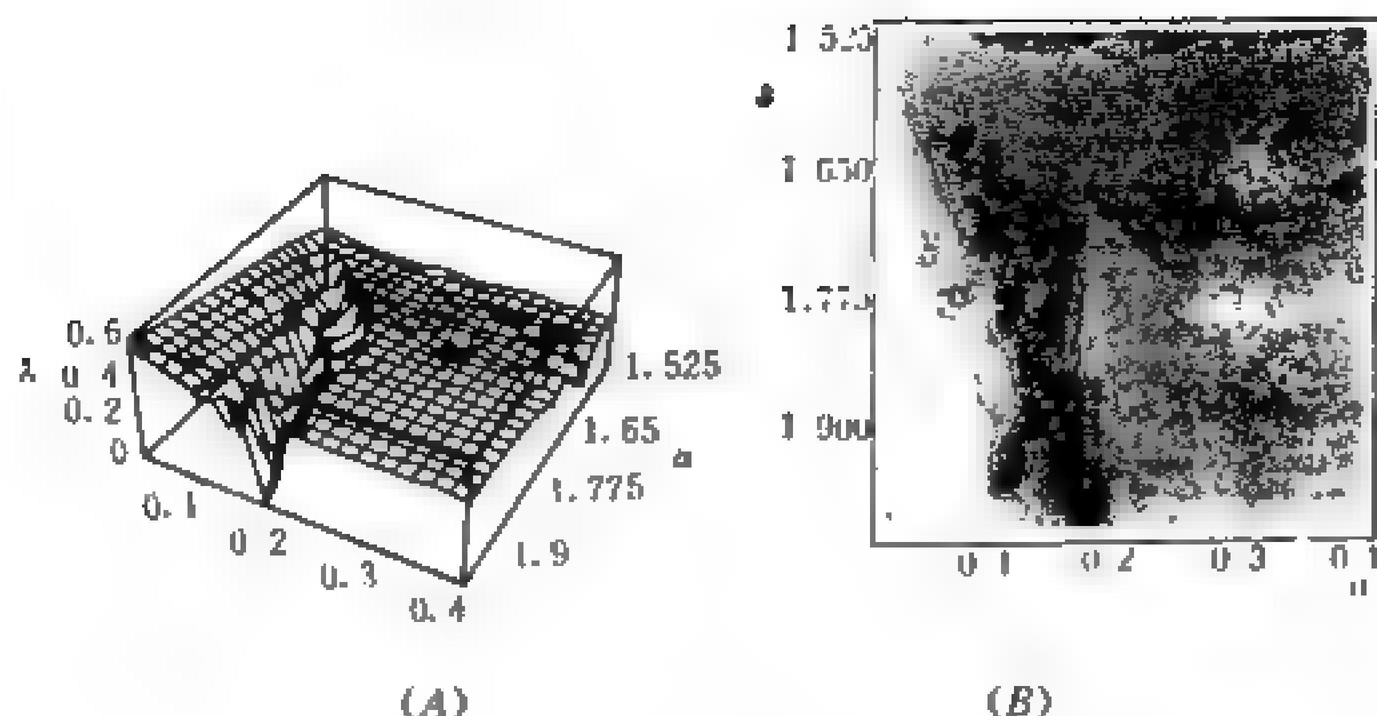
$$\lambda_{max}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log\frac{\|dx_n\|}{\|dx_{n-1}\|}, \tag{6.3.8}$$

$$\|dx_n\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{L}[dx_n^{(i)}]^2}$$

在实际计算时，我们取 $l=100$，及随机初始条件去掉 2000 步暂态过程，计算以后的 3000 步，可得到 λ_{max}。

为了使 $\{dx_n(i)\}$ 不至于过大，我们在每一步迭代中将 $\{dx_n(i)\}$ 乘以一个常数，使其最大值保持为 M。

图 6-13A 给出了参数 a 从 1.525 到 2.0，步幅 0.025 扫描的最大 L 指数三维立体图。图 6-13B 给出了对扩散系数 ϵ 从 0.02 到 0.4，步幅 0.022 扫描的最大 L 指数三维立体图。



(*A*)　　　　　　(*B*)

图 6-13

从图 6-13 中可以看出其中的"峡谷"和"盆地"。例如在图 6-13B 中当 λ 很大，例如 $\lambda=3$ 时，它对应了发展湍流运动模式，有一个"平台"。这说明此时最大 L 指数几乎不变。

四、信息量分析[10]

在复杂的时空行为中，信息不但在时间方向上传播（遗传），而且还会在空间中传递。这就需要分析时空中的交互信息流。

为了求得时空交互信息(mutual information)我们先定义时空联合概率，即在 n 时刻 i 格点状态为 $x_n(i)$ 和在 $n+t$ 时刻 $(i+m)$ 格点状态为 $x_{n+t}(i+m)$ 的联合概率 $P(x_n(i),x_{n+t}(i+m))$，根据信息熵的公式时空交互信息：

$$I^a(t,m;i) \doteq \int \log P(x_n(i))\mathrm{d}x_n(i) + \int \log P(x_{n+t}(i+m))\mathrm{d}x_{n+t}(i+m) - \int \log P(x_n(i),x_{n+t}(i+m))\mathrm{d}x_n(i)\mathrm{d}x_{n+t}(i+m) \tag{6.3.9}$$

显然，当不考虑空间变化时，$I^a(t,m,i)\equiv I^a(t,0,i)$ 为时间交互信息。当不考虑时间变化时 $I^a(t,m,i)\equiv I^a(0,m,i)$ 为空间交互信息。

在不同的运动模式中时间交互信息会各有不同。例如，在"冻结"模式中，时间交互信息会随格点的位置不同而不同，但不会随

时间的增长而减少为零。此时的事件交互信息清楚地反映了不同格点上不同的混沌行为。而在发展湍流模式中，时间交互信息则与格点无关。这正好反映了空间遍历性(Spatial ergodicity)，它的数值会随时间作指数衰减，衰减速率随非线性强度 a 的减小而减小。只有在阵发混沌模式中，衰减速率趋于 0，此时时空交互信息随时间近于幂次衰减。

空间交互信息也有类似上面时间交互信息的表现。

第四节　其他几种 CML

一、开流的 CML 模型[11][12]

在前面的讨论中，我们没有对“扩散”的方向进行限定，只要在空间的某个点上施加扰动，它就有可能向不同的方向传播开来。在这一节中我们将对单向耦合单峰格子(CLL)进行讨论。它的物理背景是具有方向性的“开流”。比如从水龙头中流出的水，或从某个孔中冒出来的气就是典型的开流例子。由于单向 CLL 与双向 CLL 的行为有许多相似之处，我们这里仅对它们的区别作详细描述。

对开流进行模拟的单向 CLL 模型具有如下的形式：

$$x_{n+1}(i)=(1-\epsilon)f(x_n(i))+\epsilon f(x_n(i-1)) \qquad (6.4.1)$$

$$f(x)=1-ax^2$$

它实际上是非对称扩散耦合格子

$$x_{n+1}(i)=(1-\epsilon)f(x_n(i))+\epsilon[\alpha f(x_n(i-1))+(1-\alpha)f(x_n(i+1))] \qquad (6.4.2)$$

的一个特例。由于是单向的，设 $\alpha=1$，最后一项为零，也就是说由于开流是单向的，所以在 i 格子上的行为只对 $i+1,i+2,\cdots$，即 i 以后(右边)的格子状态有影响，而不能相反。因此我们在研究开流模型时，有意义的边界条件就是给出第一格点的状态，而对其他格点取随机初始条件，因为在第一格点的迭代式中没任何空间项。

在对扩散(即空间耦合)作如上限制后，会出现下列新的现象：

1. 五种基本运动模式

对单向 CLL 模型运动树枝模拟表明，随着非线性强度参量 a 由小变大，会出现五种类型的运动模式。

(1) 随机图样流(flow of randomly chosen patterns)

此模式对应于双向 CLL 的冻结模式，当 a 较小时，它表现为图样的流动。图 6-14 中给出了 $a=0.5, \epsilon=1.52$ 时的空间振幅变化图。从图中可以看出，从左至右空间图样经过 90 步倍周期分叉后到达单峰映象的二带混沌区后，空间图样出现随机流动。

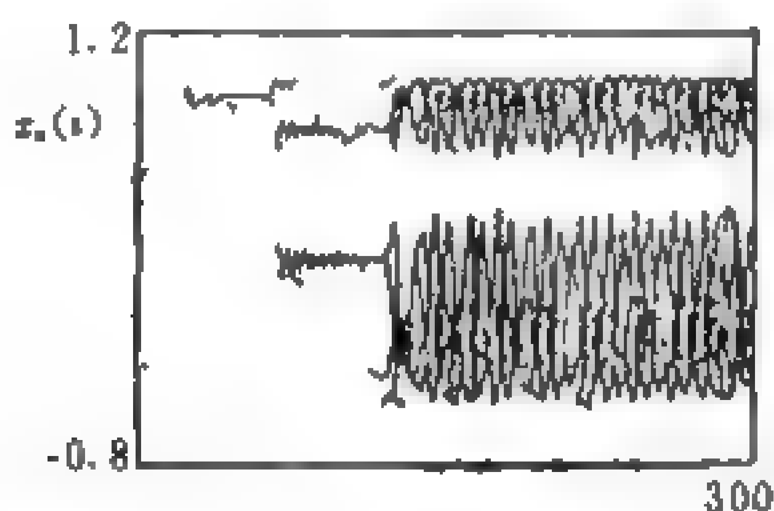


图 6-14

(2) 选择图样流(flow with selected patterns)

它对应双向 CLL 的图样选择模式，并发生在相应的参数区域内，其行为与双向的类似，即也是经过倍周期分叉到达选择图样的流动。

(3) 缺陷传播(transmission of defects)

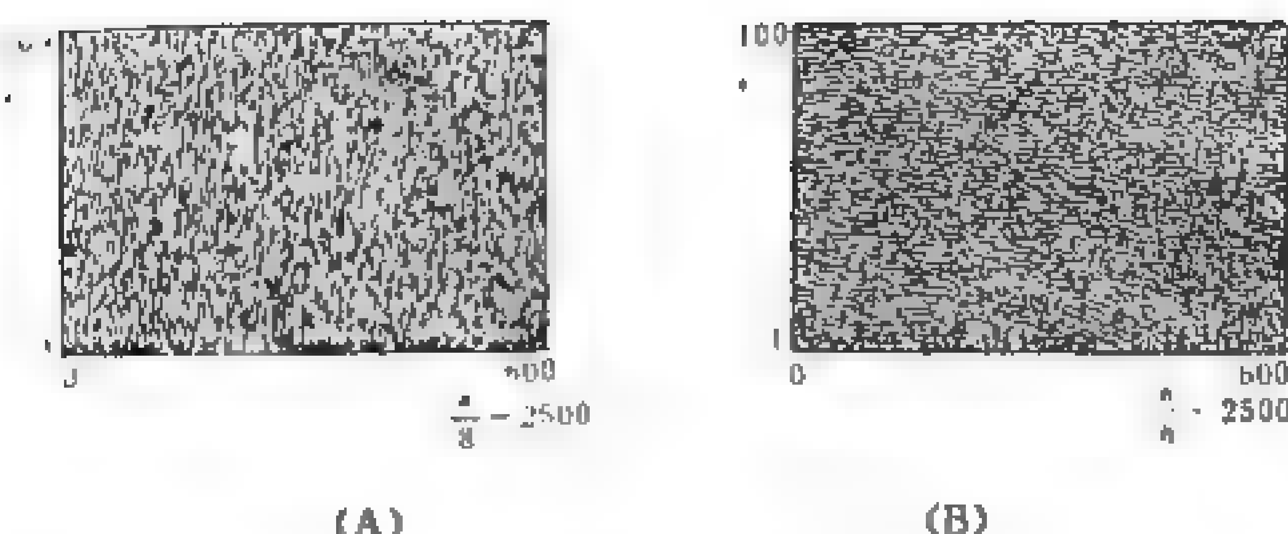
当非线性强度参量 a 大到有缺陷对产生时，可以观察到缺陷在选择图样中的传播，否则缺陷会因单向传播而很快消失，只留下锯齿图案。

(4) 时空阵发混沌(spatiotemporal intermittency)

这种图象发生在 ϵ 较大的时候，如 $\epsilon=0.3, a\sim1.69$。

(5) 完全发展湍流(fully developed turbulent state)

它是经过几步倍周期分叉和选择图样后进入湍流状态，如图 6-15 中 $\epsilon=0.3, a=1.9$ 和 $\epsilon=0.1, a=1.9$。



(A)　　　　(B)

图 6-15

2. 流动不稳定性

对于动力学系统来说稳定性是一个极为重要的概念。混沌的基本特征也是对初始条件的极度敏感性，即不稳定性。但是这里需要区分许多种类的不稳定性，例如有一种绝对不稳定性。它是指对于任意给定的格点 i，如果初始给予一个无穷小微扰 δx_0^i，在经过 n 时刻后偏离变为 δx_n^i。当 $\lim\limits_{\delta x_0^i \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{\delta x_n^i}{\delta x_0^i} \right| \to \infty$。这当然是"很强"的不稳定性。

对于开流系统来说，即使它不是绝对不稳定的(即不满足上述条件)也可能在某个以速度 v 运动的惯性系中是不稳定的。如第 i 个格点上的扰动引起了第 $i+[vn]$ 格点状态的偏离 $\delta x_n^{i+[vn]}$(其中 $[v_n]$ 表示取 v_n 的最大正数)。

如果有 $\lim\limits_{\delta x_0^i \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{\delta x_n^{i+[vn]}}{\delta x_0^i} \right| \to \infty$，则称为流动不稳定性。

引起流动不稳定性的原因在于因为系统以速度 v 流动着，经过 n 时间后，移动了 $[vn]$ 的距离。因此在 i 格点的扰动也会"波及"到离它距离为 $[vn]$ 的格点上，从而使该格点不再稳定。当然这种"波及"由于开流的单向性而只发生在"右边"。

为了定量刻划流动不稳定性，我们可以引进随移 Lyapunov 指数(co-moving Lyapunov exponent)

$$L(v)=\lim_{\delta x_0^i\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\frac{\delta x_n^{i+[vn]}}{\delta x_0^i}\right| \tag{6.4.2}$$

对于单向CLL流动不稳定性是对任意长格子i有

$$(1-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\log|f'(x_m(i))|>1 \tag{6.4.3}$$

我们感兴趣的是单向流动不稳定性的随移L指数。

在单向CLL中设i格点$n+1$时刻的状态依赖于该格点i时刻(前一时刻)的状态和前一时刻它前面一个格点$(i-1)$的状态。所以可以记

$$x_{n+1}(i)=F(x_n(i),x_n(i-1))=(1-\varepsilon)f(x_n(i)+\varepsilon f(x_n(i-1))) \tag{6.4.4}$$

$$\frac{\partial x_{n+1}(i)}{\partial x_n(i)}=\frac{\partial F}{\partial x_n(i)}=(1-\varepsilon)f'(x_n(i)) \tag{6.4.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_{n+1}(i)}{\partial x_{n-1}(i-1)}&=\frac{\partial}{\partial x_{n-1}(i-1)}=[(1-\varepsilon)f(F(x_{n-1}(i),x_{n-1}(i-1))]+\\&\quad\varepsilon f(F(x_{n-1}(i-1),x_{n-1}(i-2))]\\&=(1-\varepsilon)f'(x_n(i))\varepsilon f'(x_{n-1}(i-1))+\varepsilon f'(x_n(i-1))(1-\varepsilon)f'\\&\quad(x_{n-1}(i-1))\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

假定空间所有的格点都处于时间周期为P的轨道上,并且对任意的i,j有$x_n(i)=x_n(j)$,我们得到

$$\frac{\partial x_{\frac{mpq}{v}}(i+mpq)}{\partial x_0(i)}=\frac{(\frac{mpq}{v})!\ \varepsilon^{mpq}(1-\varepsilon)^{\frac{mpq}{v}-mpq}}{(\frac{mpq}{v}-mpq)!\ (mpq)!}\cdot\prod_{n=0}^{\frac{mpq}{v}-1}f'(x_n(i))。 \tag{6.4.7}$$

式中$n=mpq/v$,p为周期数,q距离,令q/v为一整数(即保证在一个格子上)。

利用斯特林公式$\log(n!)\approx n\log n-n$,我们得到随移$L$指数

$$L(v)=\left(\frac{1}{p}\right)\log\left|\prod_{i=1}^{p}f'(x_n)\right|+\log\left(\frac{1-\varepsilon}{1-v}\right)+v\log\left(\frac{\varepsilon(1-v)}{v(1-\varepsilon)}\right) \tag{6.4.8}$$

如图6-16。

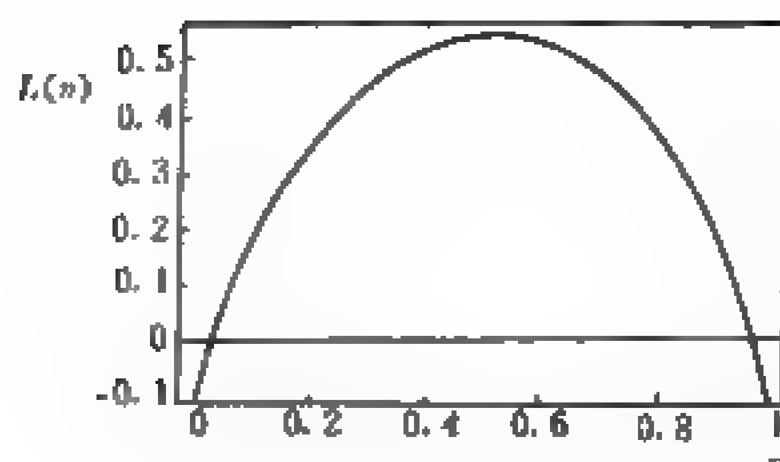


图 6-16

可以看出，$L(0)>0$ 对应于绝对不稳定系统，而 $L(v)$ 的极大值在 $v=\varepsilon$ 处，为 $L(\varepsilon)=L(0)-\log(1-\varepsilon)$，所以即使 $L(0)<0$，但如果 $L(0)<\log(1-\varepsilon)$，则 $L(\varepsilon)>0$，流动不稳定性也是存在的。

3. 空间倍周期分叉

这是单向 CLL 的特有行为。图 6-17 给出了一个典型的空间倍周期分叉过程。此时我们取 $a=1.402$，$\varepsilon=0.3$，格点数 $L=600$。去掉 $n=1000$ 以前的暂态，留下从 $n=1000$ 到 10031 时刻的各状态。

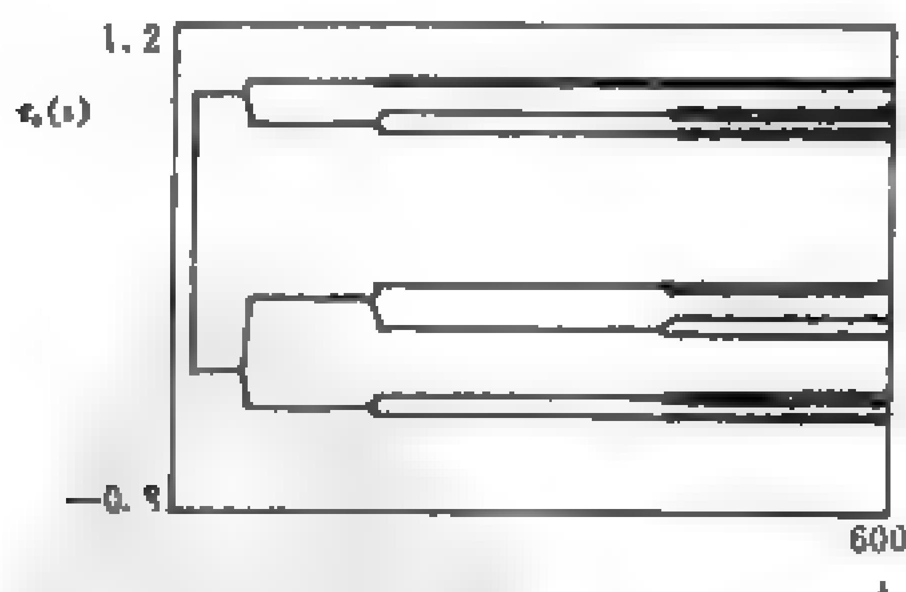


图 6-17

从图 6-17 中可以发现，分叉点之间的格点数基本上都是$(\varepsilon-1)$的正数倍，它们对应了格点振幅的个数，随着 i 的增加由 1 个分叉成 2 个，再成 4 个，8 个，等等。这就是空间振幅变化图中的倍周期分叉。

前面我们已经讨论了空间均匀态的随移 Lyapunov 指数。当

$v=\epsilon$时取极大值。很显然，当 $L(0)<0$ 时，由于边界点固定在 $x_n(0)=x^*=(\sqrt{4a+1}-1)/2a$，所以最初几个格点的周期 1 时间行为是稳定的，但随后的格点会由于前面格点附近的微小扰动而趋于振荡和流动不稳定。在 $v=\epsilon$ 处，有极大值 $L(\epsilon)$，因而在$(\epsilon-1)$正数倍的格点上振荡最明显而最后出现分叉。

在脱离周期 1 的时间以后，格点状态会以周期 2 变化。由于这些周期轨道的随移 L 指数的最大值都有限，且很小，所以分叉点之间的格点数会随周期长度的增加而增多。

当 a 较大时，单个 CLL 中包含的不稳定轨道较多，因此空间倍周期分叉行为就可能因初始条件而在几次分叉后被"截断"。当 a 略大于所谓 Feigenbaum 累积点时，其作用的不稳定轨道基本上都是那些倍周期轨道，所以分叉序列会很长，这也就是我们可以观察到许多次倍周期分叉的原因。

第五节　全程耦合映象

在一个复杂系统内部，各个元素之间总是存在这样那样的关联，这就是我们常说的"牵一发而动全身"。用物理学的话来说，就是在系统内部存在长程关联或全局耦合。应该说，作为一个有机的整体，任何系统内部的元素都是长程相关、全局耦合的(否则就不成其为系统)。但在研究具体问题时，有很多系统中并非所有的关联都起同等重要的作用。因此在一定程度上可以忽略那些对系统行为或所研究的问题来讲不太重要的关联，从而拟合不同类型的模型。比如前面的单向 CLL 模型就不考虑 i 格点对它左边(前面)格点的影响(在连续介质中这种影响是实际存在的，但微乎其微，可以不加考虑)。但是在另一些情况下，i 格点对周围所有的格点或者反过来所有的格点对某个特定的格点(如 i)都有不可忽略的影响。为了用耦合映象格子模型来表现这种情况，就要求每个格点上的状态都受其他所有格点的影响。这时，我们就需要用全局耦合映象(globally coupled map)来对它加以模拟。这个模型和前面讨

论的开流模型不同，由于第 i 个格点的状态不仅影响第 $i+1$ 个格点，也影响 $i-1$ 个格点，从而出现了许多新的重要性质。例如对第 i 个格点来说，其他格点对它的作用是一种综合行为，相当于物理学中的“平均场”；这样，由于只考虑平均场的作用，就可以不对其他格点加以区分。这实际上是不考虑空间位置，也即不考虑其他“格子”。下面我们就来研究这种全程或全局耦合映象。

一、全程耦合映象模型及三类吸引子

全程耦合映象模型的形式[13]为：

$$x_{n+1} = (1-\varepsilon) = f(x_n(i) + \frac{\varepsilon}{L}\sum_{j=1}^{L} f(x_n(j)) \qquad (6.5.1)$$

其中 $f(x)=1-ax^2$，因为只考虑平均场，所以可把空间看作是均匀的，故有 $x_n(i)=x_n(j)=x_n$。而且这种空间均匀态是稳定的。只是稳定区(即行为相同的区域)的大小各有不同而已。这样一来，对于大部分初始条件(例如 90%以上的初始条件)来说，全程耦合映象模型变化的结果可能有三类：

第一类是趋向唯一的一个吸引子。此时，对所有的 i 和 j 都有 $x_n(i)=x_n(j)$，则可把整个网格看成同一“格点集团”，我们把它称为第一类吸引子，也就是单集团吸引子。它相当于一个单一的状态(相)。

第二类是趋向少数几个吸引子。这是当单集团失稳后，分裂为少数几个均匀的稳定区(例如 k 个，k 的数目远小于整个网格的格点数 L)。我们称它为第二类吸引子。它相当于有序状态(相)。

第三类是吸引子的数目 k 接近 L(所有的格子数)的数目，以致几乎所有的格子都“各自为政”互不相同，这样的情况称为第三类吸引子。它相当于无序的状态(相)。

不难看出，在上述三类吸引子中，第二类状态(有序相)对研究时空复杂行为最有意义，因为它既可以看作是从单一态向无序态的过渡，又可以看作是复杂系统的“有生命状态”。有序相的行为实际上是由 k 个集团的耦合行为所决定的，它可以用如下 k 维耦合映象来刻划：

$$X_{n+1}^{\nu}=(1-\varepsilon)f(X_n^{\nu})+\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}f(X_n^{\mu}) \quad (6.5.2)$$

其中 X_n^{μ} 表示第 μ 个集团的状态值 x_n^{μ}；ε_{μ} 为“有效耦合”，$\varepsilon_{\mu}=\varepsilon N_{\mu}/L$；$N_{\mu}$ 为第 μ 个集团中格点的个数。

由上式可见，ε_{μ} 实际上反映了第 μ 个集团在整个网格中所占的相对体积大小。k 维耦合也就是第 ν 集团处所有其他集团对它的影响。

对于全局耦合映象来说，重要的是各类吸引子的分布和吸引域体积。图 6-18 给出了参数空间中不同“相”的分布，其中 Ⅰ 为单一相，Ⅱ 为有序相，Ⅲ 为部分有序相，Ⅳ 为无序相。

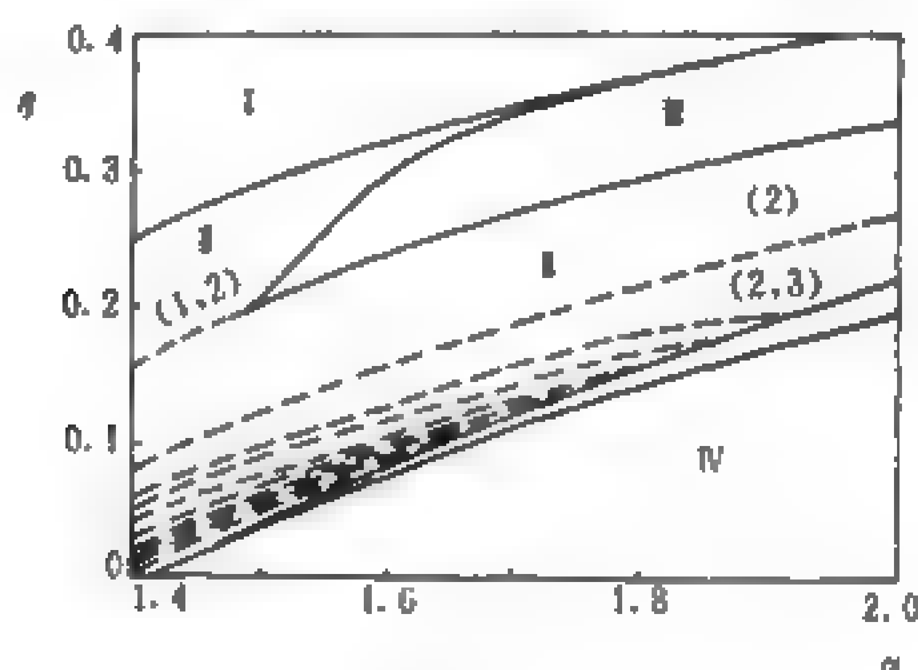


图 6-18

二、几种典型现象

1. 有序行为中的“开关”现象

最简单的有序行为是 $k=2$ 的情况，这时整个网格范围内只有两种状态，网格被“一分为二”，简单地划分为两个区域。这种划分原则上是任意的，即两集团格点数之比可大可小，但当划分的界线为单个单峰映象的不动点 $x^*=(\sqrt{4a+1}-1)/2a$ 时有重要意义。此时小于 x^* 的有 N_C 个，其他有 $L-N_C$ 个。而且 N_C 在给定参数下正比于系统尺寸 L，即 $N_C=rL$。例如当 $\varepsilon=0.3$，$a=1.85$ 时 $r=0.56$，$\varepsilon=0.3$，$a=2.0$ 时 $r=0.63$。

我们将二集团吸引子用一个二维耦合映象来表示：

$$x_{n+1}^{+}=(1-\varepsilon_{-})f(x_n^{+})+\varepsilon_{-}f(X_N) \tag{6.5.3}$$

$$x_{n+1}=(1-\varepsilon_{+})f(x_n^{-})+\varepsilon_{+}f(X_N^{+})$$

其中上标+,一分别表示状态值大于和小于 x^* 的格点数：

$$\varepsilon_{\pm}=\varepsilon N_{\pm}/L \tag{6.5.4}$$

金子邦彦在研究了这类情况后发现，这里出现一种有趣的“开关”现象。当对属于一个集团的某个格点施加一定的脉冲后，可以刺激它们从该集团“跳”到另一个集团，经过一个过渡阶段，个别格子的“跳槽”可以导致整个集团的“翻转”。即(+)集团所有格点的状态都变为(一)集团的格点的状态，而(一)集团所有的格点都又全部变为(+)集团格点的状态。

在开关现象中，“过渡阶段”是我们最感兴趣的，因为，处在“过渡状态”中系统实际上已经不能再用二维耦合映象来描述了。这里的“过渡”的过程是：

二维向空间→“危机”(过渡)出现高维向空间→翻转→(新的)二维向空间。

这种情况对于我们认识系统状态从二维转向高维是很有意义的。

对于 k 较小，但大于 2 的情况，在每两个集团(吸引子)之间原则上都可能出现开关现象。例如 A 集团和 B 集团之间的开关现象，B 与 C 集团，C 与 A 集团间的开关现象等等，这样一来情况就更复杂了。

2. 无序行为中的涨落

从系统行为随非线性强度 a 的变化情况看，演化过程是从单一吸引子变到两个吸引子，再从两个变到多个吸引子，最后达到 L 个吸引子。形象地说是从统一的局面分裂为两个、多个吸引子，最后达到可以把空间耦合项作为涨落项来处理，为此可以定义全程耦合的涨落：

$$h_n=\frac{1}{L}\sum_i f(x_n(i)) \tag{6.5.5}$$

对全程耦合映象涨落的实际测量发现它有以下二个特点：

(1) 当 $L\to\infty$ 时，它不是趋向一个常数 C 平均场：

$$x_{n+1}(i)=(1-\varepsilon)f(x_n(i))+\varepsilon C \quad (6.5.6)$$

而是涨落 (h_n) 的分布很接近 Gauss 分布，即分布不是平坦的而是会变尖。

(2) 当接近某个足够大的 N_C 时，上述"变尖"过程又会停止下来，即不再随 L 加大而使根均方差减小。

(3) 涨落均方差及 N_C 随非线性强度 a 的变化极不规则。

上述特点表明，尽管此时全程耦合映象仍具有统计性质，但它既不同于常数平均场，也不服从于大数定律、中心极限定理所描述的统计规律，而是有自己独特的规律。这一点在理论上是有重大意义的。

第六节　交叉耦合映象格子[14]

研究时空复杂行为和时空混沌的一个实际目的是希望用它来揭开湍流的秘密。但湍流是非线性强度 a 很大，时空耦合极强的系统。这就要求我们在运用模型时必须时时小心，注意所选的模型是否能表达这种特征。因为可能在建模时的简化，正好损失了关键性的信息。

CML 建模有两个特点：一个是时空离散，状态连续，一个是将反应过程与扩散过程分开处理。我们发现对于湍流问题来说，时空离散仍然可行，但将反应项和扩散项完全分开则可能出问题。这是因为反应过程和扩散过程总是同时发生，并且相互间有不可忽略的影响，这就是时空混沌远比时间混沌复杂的原因之一。考虑到上述因素必须对 CML 模型作进一步的发展、改造，考虑一种既能对湍流进行有效简化，又不丧失其定性特征的处理方法。为此人们引进了交叉 CML 模型。

1. 交叉 CML 模型的建立

交叉 CML 的基本思路是先让反应和扩散过程分开进行，然后将它们"混合"起来，以此来进行近似。这里的"混合"是交叉进行

的，即当格点 i 为偶数时，

$$x_{n+1}(i)=f(x_n(i))+\frac{\varepsilon}{2}(x_n(i-1)+x_n(i+1)-2x_{n+1}(i))$$

(6.6.1)

当格点 i 为奇数时，

$$x_{n+1}(i)=f(x_n(i))+\frac{\varepsilon}{2}(x_{n+1}(i-1)+x_{n+1}(i+1)-2x_{n+1}(i))$$

(6.6.2)

最后得到：

$$x_{n+1}(i)=\frac{f(x_n(i))}{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(x_n(i-1)+x_n(i+1))$$

i 为偶数 (6.6.3)

$$x_{n+1}(i)=\frac{f(x_n(i))}{1+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(x_{n+1}(i-1)+x_{n+1}(i+1))$$

i 为奇数 (6.6.4)

这里奇数格点和偶数格点状态显示的时间由于离散化而相差半个时间单位。图 6-19 是模型的时空状态相关图。

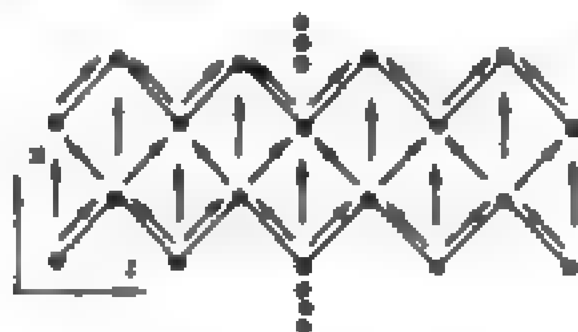


图 6-19

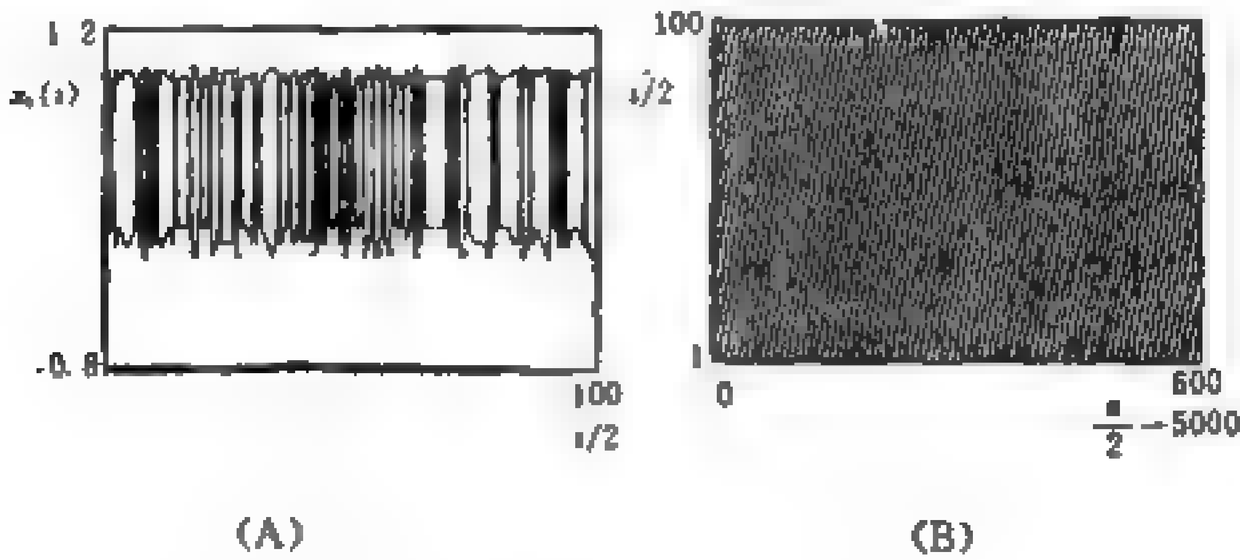
从图 6-19 中可以看出交叉耦合后 i 格点，$n+1$ 时刻的状态是由 n 时刻 i 点上局部反映项 $f(x_n(i))$ 和它邻近格点 $n+1$ 时刻的状态 $x_{n+1}(i-1)$，$x_{n+1}(i+1)$ 共同贡献的，而且在 $x_{n+1}(i-1)$，$x_{n+1}(i+1)$ 中还有 $x_n(i)$ 对它们扩散项的贡献。这就是时空"交叉"耦合的含义所在。

在交叉耦合中，关键是自己扩散，对自身的贡献，通常称为"回返扩散"，它体现了反映与扩散的"混合"作用。而且，由于在微观尺度上，扩散是"随机行走"的，它们在非线性过程中不会被相互抵消，所以在各个时期都有"回返扩散"存在，正是由于这种"混合"，

使得在一步局部反应过程的同时，扩散可以进行多次。这一特征是与其他模型不同的。

2. 交叉 CML 的行为特征

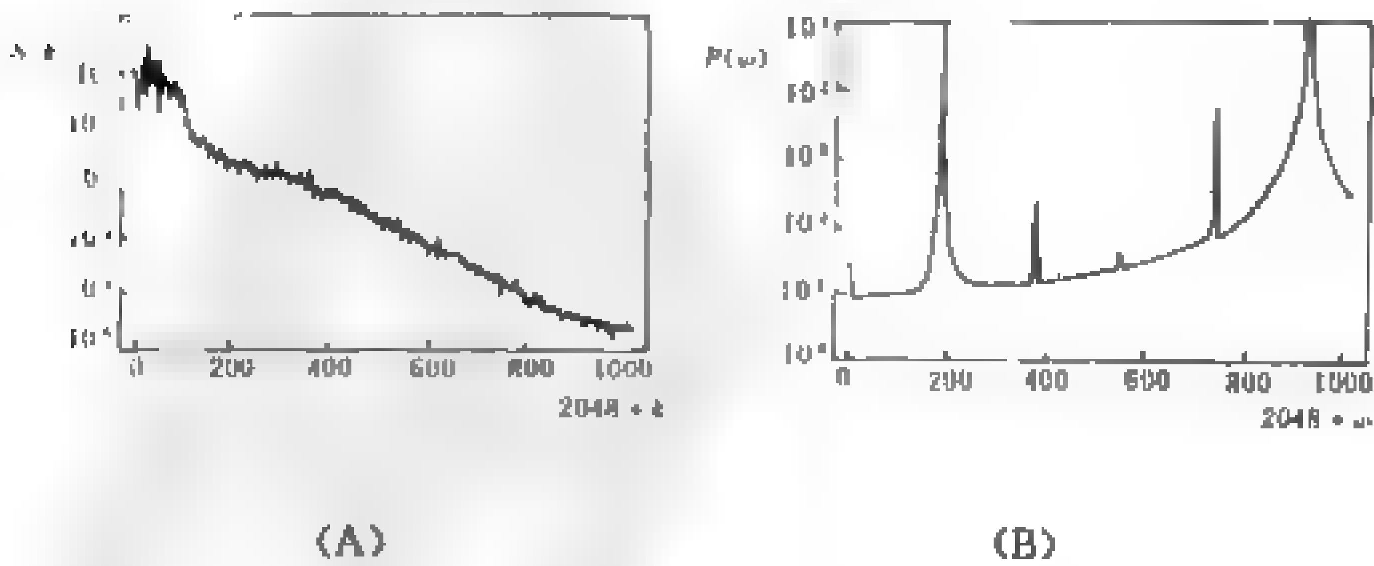
交叉 CML 模型的行为特征同样可以从最大 L 指数和功率谱中看出。图 6-20(A，B)分别给出了扭结行为的空间振幅变化和随机初始条件下时空有序态行为的发展。



(A)　　　　(B)

图 6-20

从图 6-20 中可以看出，空间均匀态和扭结态所对应的最大 L 指数小于 0，时空无序态对应的最大 L 指数大于 0。我们最感兴趣的时空有序态则是最大 L 指数趋近于 0，它意味着空间状态的时间关联长度趋于无穷，因此空间图样得以较长久地保留。



(A)　　　　(B)

图 6-21

从图6 21中可见在时间功率谱中还包含了一些尖峰结构，它们对应周期运动。当ϵ和a相对大一些时，还可以观察到倍周期的成分。从空间率谱中可以看出，随k的增加而衰减的趋势，这意味着长周期的迭加和长程相干的复杂行为。

对交叉CML的研究还刚刚开始，它的意义在于搞清从时空有序向时空无序的转化规律。

第七节　几种二维CML模型

前面我们讨论了一维情况下的耦合映象格子模型，这个"一维"指的就是一维真实空间而非相空间，此时格点的空间位置仅用一个数$i=1,2,\cdots$，来描述。如果空间维数增加到二维，或二维以上，格点的空间位置就需要用两个或两个以上的数来描述，这样一来情况就会复杂许多。因为，维数增加不是一个简单的数量问题，它要涉及许多十分基本的方面，以致系统的性质会发生质的变化。下面我们来讨论二维CML模型。

在二维CML模型中仍然让时间、空间离散，状态连续。和一维不同的是格子是平面上的网格。按理说某个网格将会受到它周围所有其他网格的作用，但为简单起见，研究时我们仅考虑最近邻的四个格子对它的影响。对于更复杂的问题，我们还可以进一步考虑"次邻近"的四个格子对它的影响。限于篇幅，也限于目前的研究进展，这里只介绍三种最简单、最一般的模型，而且仅仅给出它们的一般表达式和它们的典型行为。

一、二维单峰耦合映象格子模型(二维CML模型)[15]

在这个模型中，仍用$n=1,2,\cdots,N$表示分离的时间参数，用(i,j)二维数组或矢量来表示二维平面方格子(网格)的位置，其中i,j可以等于$1,2,\cdots,L$。局部映象仍为$f(x)=1-ax^2$。

二维CML模型的形式为：

$$x_{n+1}(i,j)=(1-\epsilon)f(x_n(i,j))+\frac{\epsilon}{4}[f(x_n(i-1,j))$$

$$+f(x_n(i+1,j))+f(x_n(i,j+1))+f(x_n(i,j-1))\Big] \tag{6.7.1}$$

其中 a 表示非线性强度，ϵ 为扩散系数，格点上的状态值可用灰度来表示。当 ϵ 较小时，二维 CLL 模型有和一维 CLL 模型类似的 6 种运动模式。它们是随着 a 的增大而呈现的。不同的是一维中的锯齿图样在二维中表现为棋盘式结构。当 $a>1.9$ 时棋盘图样失稳，最后达到完全的随机图样。

ϵ 增大，意味着空间耦合强度增加。当 ϵ 较大时，可以观察到 2×1 图案的选择模式的出现，但它的过渡时间比棋盘图样的过渡时间要长得多。其原因是要在四种结构(两种振荡，一种水平，一种是垂直的卷形结构)中竞争，最终达到类似"迷宫"的整体结构。

ϵ 继续增大，如 $\epsilon>0.4$，图样中各个区域的边界就会发生运动，小区域的边界容易失稳，并被大区域边界所"吃掉"，直到只有一种图样充满整个空间。

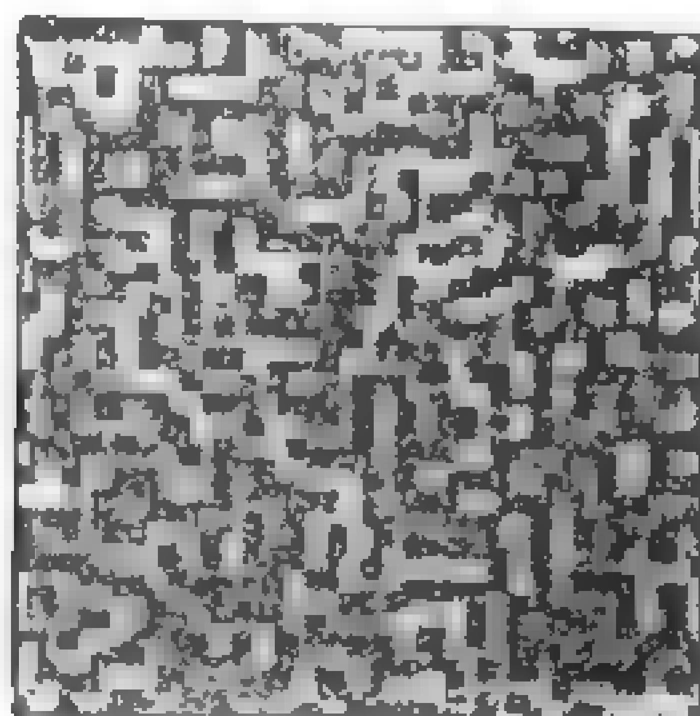
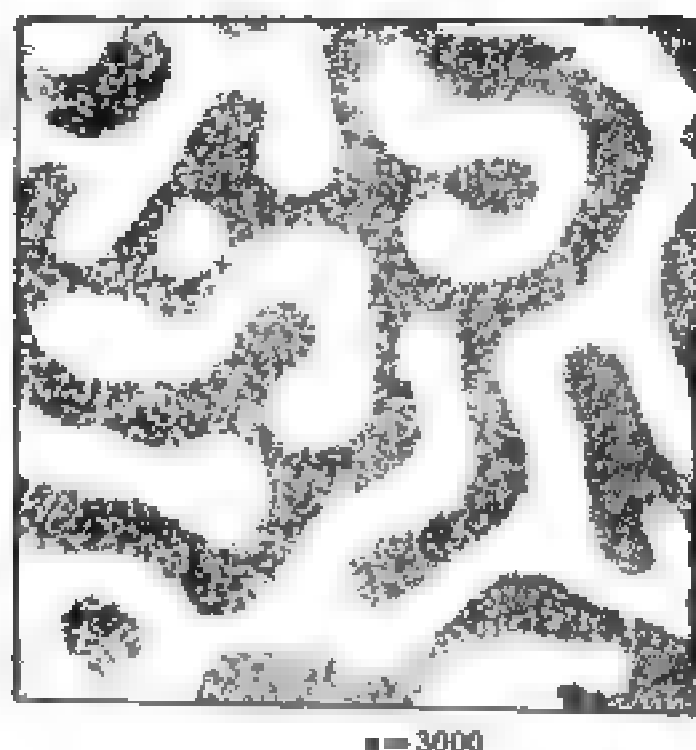


图 6-22

二、双相排列耦合映象格子模型[22]

这个模型来源于"双相合金"的实际例子。设 A,B 为由两种非常相似的金属分子构成的双相合金。当温度大于某临界温度 T_C 时，A,B 两种金属能很好地混合(熔合)，成为一个单相金属。当温

度小于 T_C 时，A,B 趋向于各自“成团”。由于扩散作用而使在某些区域 A 的密度远大于 B 的密度。这时我们可以把它们的密度差作为是图案的序参量 ψ，它表示形成空间图样的程度。



[illegible]=3000

图 6-23

对 ψ 建立 CML 模型，它的初步形式为：

$$\psi_{t+1}(i,j)=f(\psi_t(i,j))+D(\langle\!\langle\psi_t(i,j)\rangle\!\rangle-\psi_t(i,j)) \qquad (6.7.2)$$

式中 D 为扩散系数；$\psi_t(i,j)$ 为 t 时刻，处在 (i,j) 位置 A,B 两种金属分子的密度差。ψ 的时间演化方式为：

$$\psi_{t+1}=f(\psi_t)=Ath\psi \qquad (6.7.3)$$

$$\langle\!\langle\psi_t(i,j)\rangle\!\rangle=\frac{1}{6}[\psi((i-1),j)+\psi((i+1),j)+\psi(i,(j-1))+\psi(i,(j+1))]+\frac{1}{12}[\psi((i+1),(j+1))-\psi((i-1),(j+1))+\psi((i+1),(j-1))+\psi((i-1),(j-1))] \qquad (6.7.4)$$

为了考虑实际系统中的守恒量，需要引入

$$I_t(i,j)=f(\psi_t(i,j))-\psi_t(i,j)+D(\langle\!\langle\psi_t(i,j)\rangle\!\rangle-\psi_t(i,j)) \qquad (6.7.5)$$

得到

$$\psi_{t+1}(i,j)=\psi_t(i,j)+I_t(i,j)-\langle\!\langle I_t(i,j)\rangle\!\rangle \qquad (6.7.6)$$

式中 $\langle\!\langle I_t(i,j)\rangle\!\rangle$ 与 $\langle\!\langle\psi_t(i,j)\rangle\!\rangle$ 有相同形式。

双相排列耦合映象格子模型的优点在于数值模拟的效率很高，在应用时它的一步至少相当于通常的 Monte Carlo 法的 1000 步。

三、二维螺旋波模型[17]

螺旋波是二维反应扩散过程所产生的典型现象，但实际模拟起来却十分困难，为了模拟二维螺旋波，必须在建模时作一些特殊考虑。例如考虑"能量"扩散过程对格点的非线性影响等等。建立二维螺旋波模型的方式仍然是从单峰映象出发，然后一方面在空间上从一维推广到二维，即考虑四邻格点的影响，另一方面考虑扩散过程对反应过程的"混合"。

例如，考虑如下形式的单峰映象：$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)$，(它是前面那些单峰映象的变形)

$$I_n(i,j)=4x_n(i,j)-x_n(i+1,j)-x_n(i-1,j)-x_n(i,j+1)-x_n(i,j-1) \tag{6.7.7}$$

$$J_n(i,j)=4x_n(i,j)-x_n(i+1,j+1)-x_n(i-1,j+1)-x_n(i+1,j-1)-x_n(i-1,j-1) \tag{6.7.8}$$

得到二维 CML 模型：

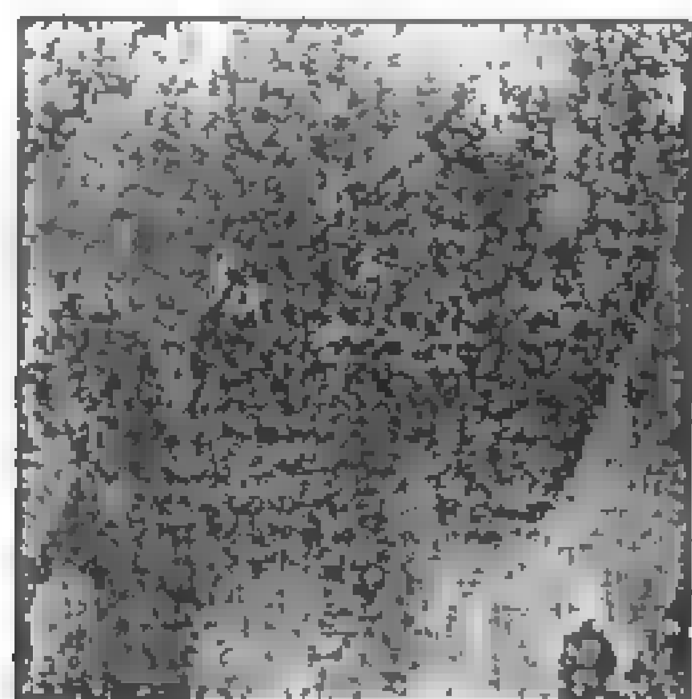
$$x_{n+1}(i,j)=\mu x_n(i,j)\left[1-x_n(i,j)+\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)-I_{n+h}(i,j)+\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)-J_n(i,j)\right] \tag{6.7.9}$$

其中当 $i+j$ 为偶数时，$h=0$；当 $i+j$ 为奇数时，$h=1$。为保证 $x_n(i,j)\geqslant 0$，将大于 1 的 $x_n(i,j)$ 截断为 1。

上述模型的特点是局部非线性强度与空间扩散有关。在强空间耦合时，系统行为与一维交叉 CML 相同，是空间均匀态。在空间耦合强度为中等(如 $\mu=4.0$，$\varepsilon=0.36$)时系统会出现螺旋波。

出现螺旋波的原因是，大多数格点的时间行为都近似为周期 2，由于周期 3 的三个不同相位，一些大小不同的区域边界出现不稳定，从而发生"循环侵蚀"的情况。如在 A，B，C 三个区域间，A 侵蚀 B 的边界，B 侵蚀 C 的边界，C 侵蚀 A 的边界。这样三个区域的共同边界点就成了螺旋波传播的中心点。

应该指出的是在二维CML模型中看到螺旋波发生是不容易的，需要引进了一系列特殊条件。由于模拟的困难，目前还只能针对一些特殊的情况进行讨论，要找到对螺旋波的统一描述还需要作更艰苦的探讨。



$t=600$

图 6-24

第八节　量子混沌

前面所研究的混沌，无论是耗散系统中的还是保守系统中的，无论是低维、高维还是无限维的，无论是时间的还是时空的都属于发生在宏观系统中的混沌。这些宏观系统服从牛顿力学的运动规律，因此可以统称为经典系统中的混沌或“经典混沌”。但是，前面那些对经典混沌的讨论也并不完善，因为它还只是针对确定性的经典系统。所以，更确切地说是确定性系统中的混沌。随着研究的深入，人们自然会问，在包含不确定性的经典系统和针对微观课题的量子系统中情况又会怎样呢?其实，这两方面的问题存在着深刻的内在联系。把它们联系在一起的就是不确定性、随机性、统计性和量子性。当混沌研究深入到这些领域时，人们发现问题就更为复

杂，研究就更为困难了。在本节中我们仅对量子混沌的问题作一个简单的介绍，主要是介绍一些有代表性的观点和处理方法。限于目前的研究进展，这里只能作一般性的讨论。

一、量子系统中混沌的含义

为了搞清量子混沌的含义，我们不妨先看一下以往研究过的经典混沌的特征。归纳起来，它们是：(1) 来自于遵循经典理论的系统；(2) 来自于具有确定性意义的运动方程，但确能从中产生某种意义的随机行为，由于这种随机性它来自系统内部，又称之为“内随机性”；(3) 这种混沌系统的功率谱一般都是连续的；(4) 这种混沌一般都至少具有一个为正的 Lyapunov 指数；(5) 这种混沌往往具有分数维数，大于零的拓扑熵、测度熵、混合熵等定量特征；(6) 这种混沌是一种“定常”运动，属于众多非线性系统复杂行为中的一种。由于经典力学和量子力学有着根本性的不同，量子混沌也应有完全不同的含义，所以我们并不要求量子混沌具有以上所有性质，而只要求它具有混沌的基本特征。按照我们的理解，这个基本特征就是对初始条件的敏感依赖性，它可以用为正的 Lyapunov 指数来表示。

对量子系统的讨论的关键是区分可积和不可积两种情况。根据 Bohr-Sommerfeld 量子化条件：每个运动积分或不变量导致一个量子数。这个量子数对能级实现完备的标识和分类。也就是说，如果是可积系统，有 N 个自由度就有 N 个守衡量，或 N 个“好量子数”，每个守衡量对应一个能级，它们是有规则排列的。又由于能级间是互不相关的，在一个能级之后何处出现下一个能级是与它们之间的间距无关的。因此能级间的间距 S 满足 Poisson 分布：

$$P(S)=(1/D)\exp(-S/D),S\geqslant 0 \tag{6.8.1}$$

其中 D 为平均能级间的间距。

从分布的图象中可以看出，$P(S)$ 在 $S=0$ 时有极大值，这表明可积系统的能级有“成团”的趋势。它是相对稳定，因而不可能具有经典意义下的混沌。

对于近可积系统或不可积系统，守恒量的个数比自由度少，而

完全不可积系统则只有一个守衡量，它对应了系统的能量。这时能级的排列就不再是有规则的了。与可积系统中的成团趋势相反，在不可积系统中能级间存在排斥现象。

关于能级间的排斥现象，可以这样理解：如果不可积系统具有时间反演不变性，其能级的统计分布和 Gauss 正交系统的统计性质一致，可以由它的随机矩阵的本征值分布来表示。如果系统不具有时间反演的不变性，则和 Gauss 幺正系统的统计性质一致。所谓 Gauss 正交系统，就是实对称矩阵的集合，其矩阵元是服从 Gauss 分布的随机数，而 Gauss 幺正系统是复厄米矩阵的集合，其矩阵元的实部和虚部分别服从 Gauss 分布。这两种分布的共同性质就是能级间的互相排斥。

由于存在能级间的排斥，使得相邻能级不会发生重叠，也就是说从一个能级到下一个能级之间存在一个大于零的间距 S，可以证明，属于同一守衡量的能级间距满足 Wigner 分布：

$$P(S)=\left(\frac{\pi S}{2D}\right)\exp\left(-\frac{\pi S^2}{4D^2}\right),S\geq 0 \tag{6.8.2}$$

从经典混沌的研究中可知，不可积性往往就意味着混沌性，因此，有些学者(如陈式刚)认为，可以把能级间距满足 Wigner 分布的系统称为量子混沌系统。

关于 Hamilton 算子中含时间的系统，直到目前我们还知之甚少，通常只处理周期性的微扰和能级间的跃迁。对一些具体的含时间量子系统，如周期力刺激下的量子转子，人们作过大量的数值研究，结果表明"所看到的量子混沌行为是一定时间范围内，或频率区间内的经典混沌的遗迹，而不是完全的量子效应"[16]。

二、量子混沌的一个严格数学模型

为了证明量子混沌确实存在，人们构造了一个严格的数学模型。这个模型就是量子标准映象，通过对它的分析，以及与经典标准映象对比，能清楚地认识量子性对混沌的影响。

考虑一个与径向绕映象对应的 Hamilton 系统：

$$H=H_0(J)+\varepsilon V(\theta,t) \tag{6.8.3}$$

式中 $V(\theta,t)=V(\theta)\Sigma\delta(t-nT)$

设 ψ 为波函数,则上式所描述的时间行为可以归结为量子映象：

$$\psi_{n+1}=U\psi_n \tag{6.8.4}$$

$$U=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t=n}^{t=n+1}Hdt\right) \tag{6.8.5}$$

将上式代入 U 可得：

$$=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}TH_0(J)\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}V(\theta)\right) \tag{6.8.6}$$

特别是对于标准映象,有

$$H_0(J)=-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},V(\theta)=\frac{K\cos\theta}{\varepsilon} \tag{6.8.7}$$

所对应的量子映象为：

$$=\exp\left(i\frac{\hbar T}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{K\cos\theta}{\varepsilon}\right) \tag{6.8.8}$$

U 是一个幺正变换,设其本征值 $e^{-i\lambda}$,本征函数为 ψ_λ,则

$$U\psi_\lambda=e^{-i\lambda T}\psi_\lambda \tag{6.8.9}$$

根据这个定义,可以求得与量子映象 U 对应的准能级 λ。

对量子标准映象的研究结果表明：

(1) 量子效应显著的低维系统不具有混沌；

(2) 具有经典混沌的量子系统在准经典近似下具有量子混沌,这种系统的能级分布具有 Gauss 正交(GOE)的性质,这个性质可以作为量子混沌是否充分的判据；

(3) 量子系统满足 Schrodinger 方程,而 Schrodinger 方程是线性的,尽管它也是一种确定论系统,但它所确定的是体现统计规律的波函数。因此量子混沌与经典混沌有着根本性的不同。经典混沌的根本特征是它的不稳定性,而量子混沌的根本特征则是能级间距服从 Wigner 分布,量子混沌与运动不稳定无关。

三、单色场中氢原子的混沌行为

前面关于量子混沌的讨论还只是一种理论模型,从某种意义上来讲它还是人为"构造"出来的,不太使人相信量子混沌的真实存在。因此我们希望找到一个能实验观察到的例子,以验证量子混

沌的存在。

看来单色场中氢原子就是具有量子混沌行为的一个实例。

1974 年前后 J. E. Bayfield 和 P. M. Koch 对频率处于 $\frac{\omega}{2\pi}$ 到 10GHz 之间，峰值强度 ϵ 为 10V/cm 的微波场中的高激发态氢原子进行了游离实验，其结果看来只能用类似经典混沌扩散的概念来解释。由于具体的讨论涉及许多专门的知识，这里不作详述，有兴趣的读者可参考本章文献[19]。下面仅给出其中图 6-25、6 26、6-27的三幅图，可以作为量子解与经典解，量子游离与经典游离的比较：

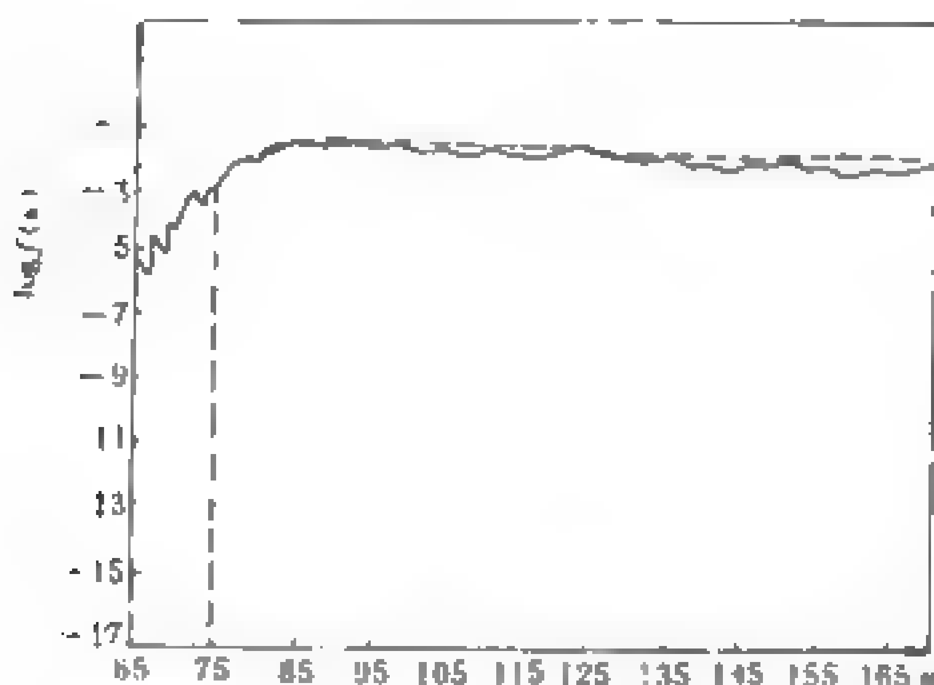


图 6-25

$n_0=100, \epsilon_0=0.08, \omega_0=1.5, \tau=60$ 时的 f(n)，实线为量子解，虚线为经典解

从图 6 25、26 中可以看出量子混沌和经典混沌作用空间扩散是相似的，但它们却有本质的不同，这表现在经典混沌本质上是不稳定的，而量子混沌则是稳定的。

图 6-27 表现它们间的区别。

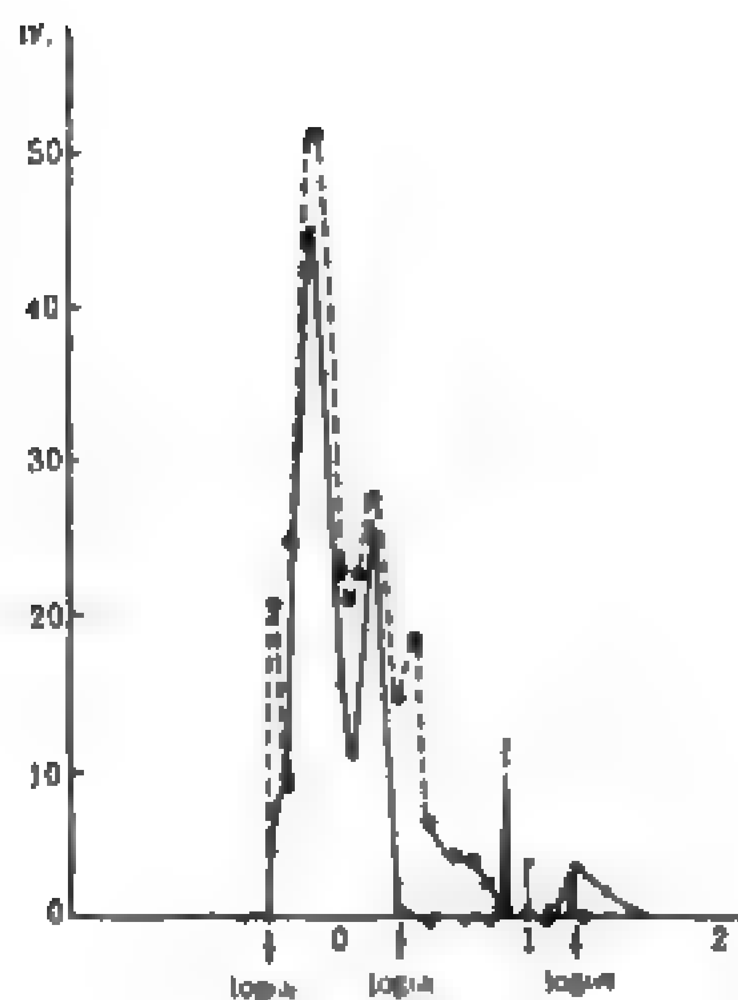


图 6-26
实线为量子游离率，虚线为经典游离率

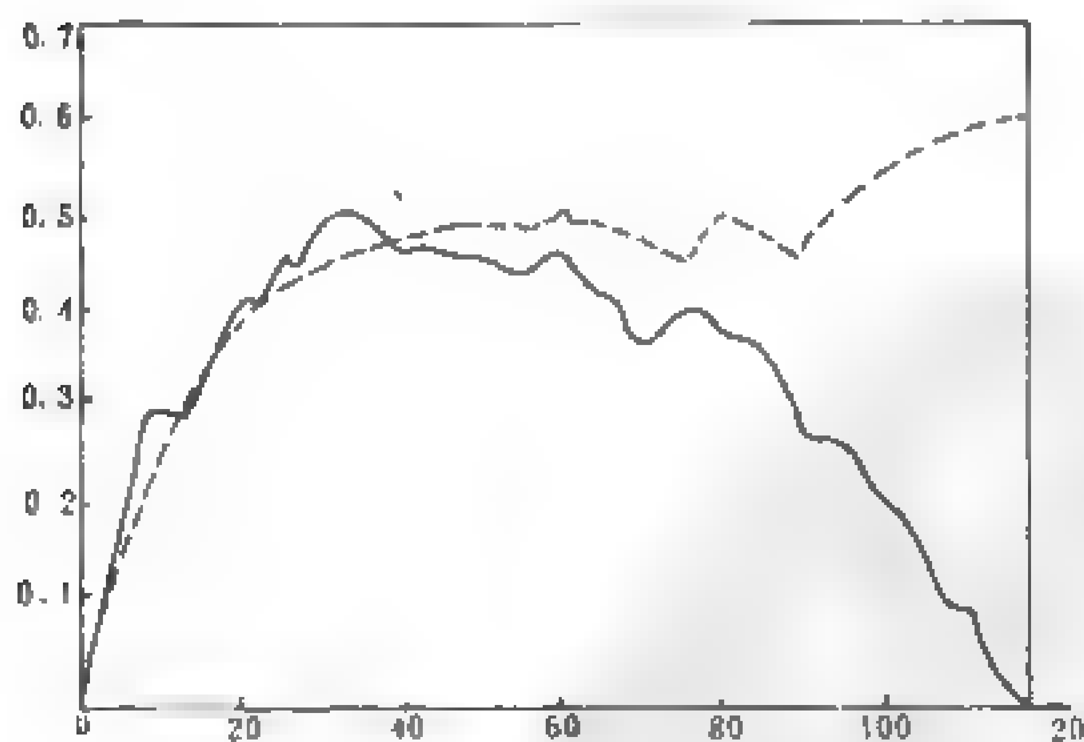


图 6-27
其中实线为量子解，在作时间反演后会回到初态，
而由虚线表示的经典解，不能回到初态

参 考 文 献

[1] 郝柏林,北京 中国科学院院刊,1988,第一期,5-14 页。

[2] 杨维明,时空混沌与耦合映象格子,上海:上海科技教育出版社,1994,15 页

[3] Kaneko K Ph. D. Thesis, Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative System, 1983

[4] Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos, pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. Physica 34D(1989)1

[5] Kaneko K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: towards a prelude of a "field theory of chaos", Prog. Theor. Phys., 72(1984)480

[6] Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos, pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. Physica 34D(1989)1

[7] Kaneko K. Turbulence in coupled map lattices, Physica, 18D (1986):609

[8] Chate H and Manneville P. Continuous and discontinous transution to spatio-temporal intermittency in two dimensional coupled map lattice, Europhys. Lett., 6(1988):409

[9] Kaneko K. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices, Physica 23D(1986):436

[10] 杨维明,刻划复杂系统——从映象到时空耦合映象,博士学位论文,北京:中国科学院理论物理研究所,1991

[11] Jensen M H. Fluctuations and scaling in a model for boundary layer induced turbulence. Phys. Rev. Lett. 62(1989):1361

[12] Jensen M H Boundary layer instability in a coupled map model. Physica 33D(1989):203

[13] Kaneko K. Chaotic but regular posi-nega switch among coded attreators by cluster size variation. Phys. Rev. Lett. 63(1989):219

[14] 杨维明,刻划复杂系统——从映象到时空耦合映象,博士学位论

文,北京:中国科学院理论物理研究所,1991

[15] Kaneko K. Spatiotemporal chaos in one-and two-dimensioal coupled map lattices. Physica, 37D(1989):60

[16] Oono Y and Puri S. Computational efficient modeling of ordering of quenced phases. Phys. Rev. Lett., 58(1986):836

[17] 杨维明,斑图复杂系统——从映象到时空耦合映象,博士学位论文,北京:中国科学院理论物理研究所,1991

[18] 郝柏林,北京:中国科学院院刊,1988,第一期,5 页

[19] 陈式刚,映象与混沌,北京:国防工业出版社,1992,305 页

第七章　混沌的控制

前面的章节已描述了各类混沌现象，讨论了混沌运动的特征和测度，介绍了混沌运动的各类模型及其演化规律。本章集中讨论与混沌控制及其应用相关的各类问题。

由于在现实生活中混沌运动往往是有害的，所以混沌研究一兴起，人们就在探索如何避免或控制混沌运动的问题。为了避免混沌运动的发生，人们曾考虑用改变系统结构的方法来避开产生混沌运动的区域。但具体的系统结构是根据需要设计好的，有时很难作较大的变动，所以这样的方案难以实现。由于混沌运动是极为复杂的运动形式，传统的控制方法又难以直接应用，因此混沌控制成了长期困扰学术界的难题。经过 20 多年的艰苦努力，人们终于在 90 年代取得了重要突破。下面先介绍关于控制的一般概念，然后再探讨混沌控制的策略、方法与途径。

第一节　关于控制的一般概念[1]

控制这个术语，无论在科学技术还是日常生活中都经常运用，它含有调节、操纵、管理、指挥等意义。它是指某个主体即控制器使其作用的对象即效应器按一定的目的来动作。例如对温度的控制，若要保持室温基本稳定在某一温度时，如 25℃左右，则必须使用两个控制器，一是加热器，一是散热器。当室温高于 25℃时，自动关闭加热器，启动散热器；当室温低于 25℃时，自动关闭散热器，启动加热器，以控制室温保持在 25℃左右。广义地说，一个人看见一个物体并以手取物，这也是一种控制过程，视觉系统将信息(物体的位置)传递给大脑，人的大脑是控制器，通过神经系统下达指令，使手(效应器)按大脑的指挥取物。

由控制的概念可知，要实现控制作用，必须有控制环节和效应环节，并按一定的规则组成系统，同时必须有信息的传递和处理。因此在研究控制作用的机制和特性时，控制、信息和系统三方面的理论和概念是不可分割的整体。

所谓系统是指由有规则的相互作用或相互依赖的一些环节（或元件）连接起来的整体。控制系统是一个具有一定功能可以完成某种控制任务的系统。它包括了控制元件和效应元件。为实现准确有效的控制，通常还要将效应元件执行控制命令的情况返回到控制元件，这就需要一个信息反馈装置。不论是工程控制系统或是生物控制系统，都有类似的结构。

控制系统的输出，通常就是被控制量，如温度、电压等，也就是可以测出的系统状态。控制系统的输入，通常是被控制量所要求的给定值或一个在允许范围内变化的量。如果是人为地给系统一个有目的的输入，这种输入往往又称为给系统的刺激或称为对系统的控制量。系统运行过程中往往会遇到扰动或干扰，这是影响控制系统正常工作的不利因素，如生产过程中负荷的变化，信号测量中的噪声等，还必须作专门处理。

一、稳态反馈系统

1. 控制元件的串联和并联

控制元件作为系统的一个环节，一般可用一个方框来表示（参见图 7-1）。连在框外的矢量表示此环节和其他环节或环境之间的联系。箭头指向方框的矢量为该环节的输入 f，箭头指向框外的矢量为该环节的输出 y。K 是由输入转换成输出的放大因子，称为该环节的增益。对于几乎不随时间改变的稳态系统，f、y、K 都近似不变，可看作常数来处理。这里

$$K=y/f \quad \text{或} \quad y=Kf \tag{7.1.1}$$

若第一元件的输出作为第二元件的输入就是两个元件的串联，如图 7-1 所示。其中

$$y=K_1x \tag{7.1.2}$$

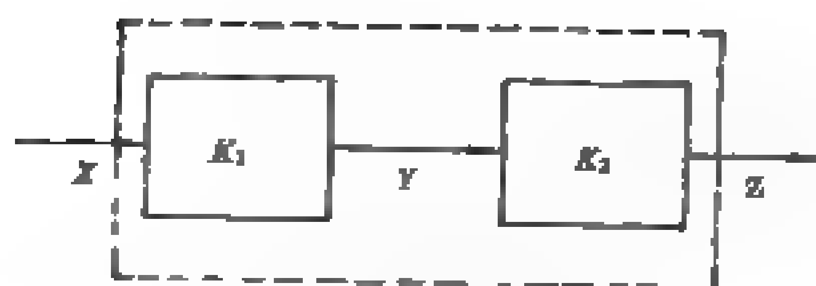


图 7-1 两个元件的串联

$$z=K_2y \tag{7.1.3}$$

如果把 K_1 及 K_2 两个环节合并起来看作是一个环节，如虚线外框所示，其输入为 x，输出为 z，增益为 K，则应有

$$z=Kx \tag{7.1.4}$$

如将式(7.1.2)代入式(7.1.3)，则有 $z=K_2K_1x$，故有

$$K=K_2K_1 \tag{7.1.5}$$

即两元件串联后的新元件的增益 K 是两个串联增益 K_1、K_2 的乘积。

若由分支点发出两个相同的输入至两个不同的控制元件，两者的输出再通过和点叠加起来，就是元件的并联，如图 7-2 所示。其中

$$y=K_1x \tag{7.1.6}$$

$$z=K_2x \tag{7.1.7}$$

$$y+z=(K_1+K_2)x \tag{7.1.8}$$

如果把并联环节看成是一个新的环节，如图 7-2 中的虚线所包围的部分，其输入为 x，输出为 $y+z$，则此环节的增益按式(7.1.8)应是 K_1+K_2，新环节的增益是两个并联环节增益之和。

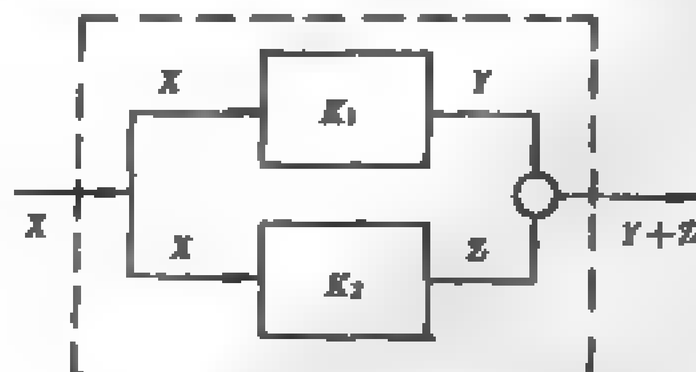


图 7-2 两个元件的并联

2. 反馈

若第一元件 G(称为前馈环节)的输出为 y,它是第二元件 F(称为反馈环节)的输入,F 的输出 y_1 又进入和点,和整个系统的输入 x 相加(代数和)后成为 x_1,再作为第一元件 G 的输入,这样的系统称为反馈系统。如图 7-3 所示。设此反馈系统的等效系统(如图 7-3 的虚线所示)的增益为 K。现分析 K 和 G、F 的关系:

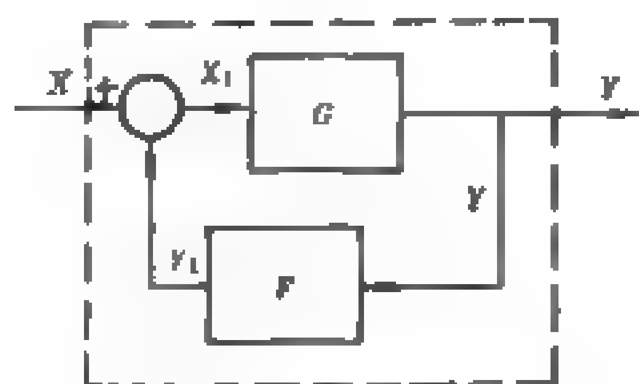


图 7-3 反馈系统示意图

$$x_1=x-y_1 \tag{7.1.9}$$

$$x_1=y/G \tag{7.1.10}$$

$$y_1=yF \tag{7.1.11}$$

将式(7.1.10)及(7.1.11)代入式(7.1.9),有

$$x=y(1/G+F) \tag{7.1.12}$$

$$y=Gx/(1+GF) \tag{7.1.13}$$

$$K=G/(1+GF) \tag{7.1.14}$$

在图 7-3 中 y_1 进入和点时取负号,所以称为负反馈系统。如果 y_1 进入和点时取正号,则称为正反馈系统,这时

$$K=G/(1-GF) \tag{7.1.15}$$

二、动态反馈系统

如果要深入讨论某一系统的特性和品质,就必须对其动态特性进行研究,也就要把系统中的各种输入、输出都看成随时间变化的函数。其输入和输出之间的关系,往往要用微分方程来表示。研究动态系统,过去常用两种模型一是应用 60 年代前建立的经典控制理论,主要研究单输入单输出系统的问题,它用联系输入输出间关系的数学表达式(一般是微分方程式)来表示系统的数学模型;另一种是应用现代控制理论,以状态变量来反映系统的全部特征,

建立状态变量和输入、输出间的关系方程。

不同类型的系统必须用不同性质的特征方程来描述。而且，用以分析它们行为的数学技巧也就有很大的区别。

最常见的动态系统主要有以下几类：

(1) 集总参数系统是指系统中的参数和空间中的坐标位置无关的系统。分布参数系统则说明系统参数中至少有一个是随空间坐标而变化的。

(2) 时不变系统是指系统中的全部参数均与时间无关。而时变系统则意味着系统的参数中至少有一个是随时间变化的。

(3) 离散系统是说系统中变量的变化只能发生在特定的瞬间，在这些特定的瞬间，变量保持常数或无定义，常用差分方程来描述；而连续系统中变量的变化可以发生在任一时刻，常用微分方程来表示。

(4) 线性系统，就是能遵从叠加原理的系统。

设 $f_1(t)$为系统的输入，其对应的输出为 $y_1(t)$。当系统的输入为 $f_2(t)$时，其对应的输出为 $y_2(t)$。如果我们以

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \tag{7.1.16}$$

为输入，如果该系统的对应输出是

$$\alpha y_1(t)+\beta y_2(t) \tag{7.1.17}$$

则称该系统符合叠加原理，也就是说该系统是线性系统。

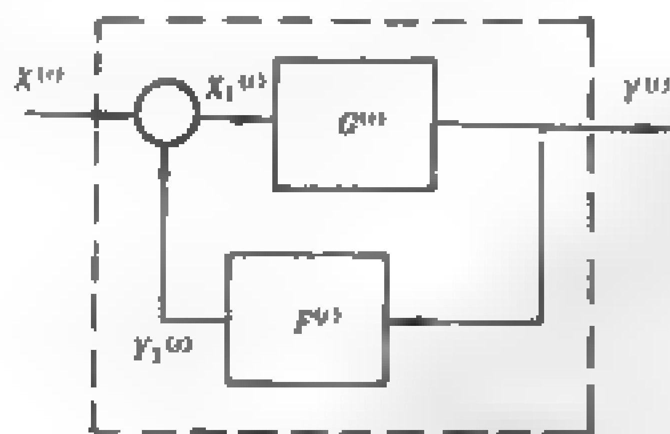


图 7-4　动态反馈系统示意图

不符合叠加原理的系统，则为非线性系统。即常常有混沌出现的系统。非线性系统的控制问题是当今国际学术界最注目的热点

之一。

要了解系统的动态特性实际上就是考察系统所代表的微分方程的解的特性，其中解的稳定性是系统动态特性中最重要的性质。动态反馈系统由图 7 4 所示。

三、传统非线性系统处理方法

非线性系统有着和线性系统完全不同的特征，对其运动方程的求解，因为不能运用叠加原理，故其解不能由特殊解的线性组合来产生。因此，研究其解的几何性质就更为重要。特别是非线性系统有时其解的局部性质和大范围的性质完全不同，有时解不一定在全部时间范围内有意义，也就是说，线性系统的各种性质在非线性系统中一般不再保留。这就给系统的控制带来许多困难。

为了理解线性系统和非线性系统性质上的差别，我们来比较两个最简单的一阶系统。方程

$$\dot{x}+x=0 \tag{7.1.18}$$

表示一个一阶线性系统。方程

$$\dot{x}+x(1-x)=0 \tag{7.1.19}$$

表示一个一阶非线性系统。如果式(7.1.18)系统的初始条件为 $x=x_0$(即给系统以 $x_0\delta(t)$的输入)，则式(7.1.18)的解(系统的输出)为

$$x=x_0e^{-t} \tag{7.1.20}$$

另一方面以同样的初始条件赋予式(7.1.19)的非线性系统，则其解为

$$x=\frac{x_0e^{-t}}{1-x_0+x_0e^{-t}} \tag{7.1.21}$$

图 7-5 表示了初值为 x_0 的各时间的线性与非线性系统的响应曲线。由图 7-5 可知，即使如此简单的一阶系统，也出现了线性系统所不存在的现象。式(7.1.19)中的平衡状态不是一个 $x=0$，而是互相孤立的 $x=0$ 和 $x=1$。某些解收敛到零，而某些解在有限时间内就发散到无限大(系统不稳定)。如前面几章所述，这种现象是非线性系统的固有现象。

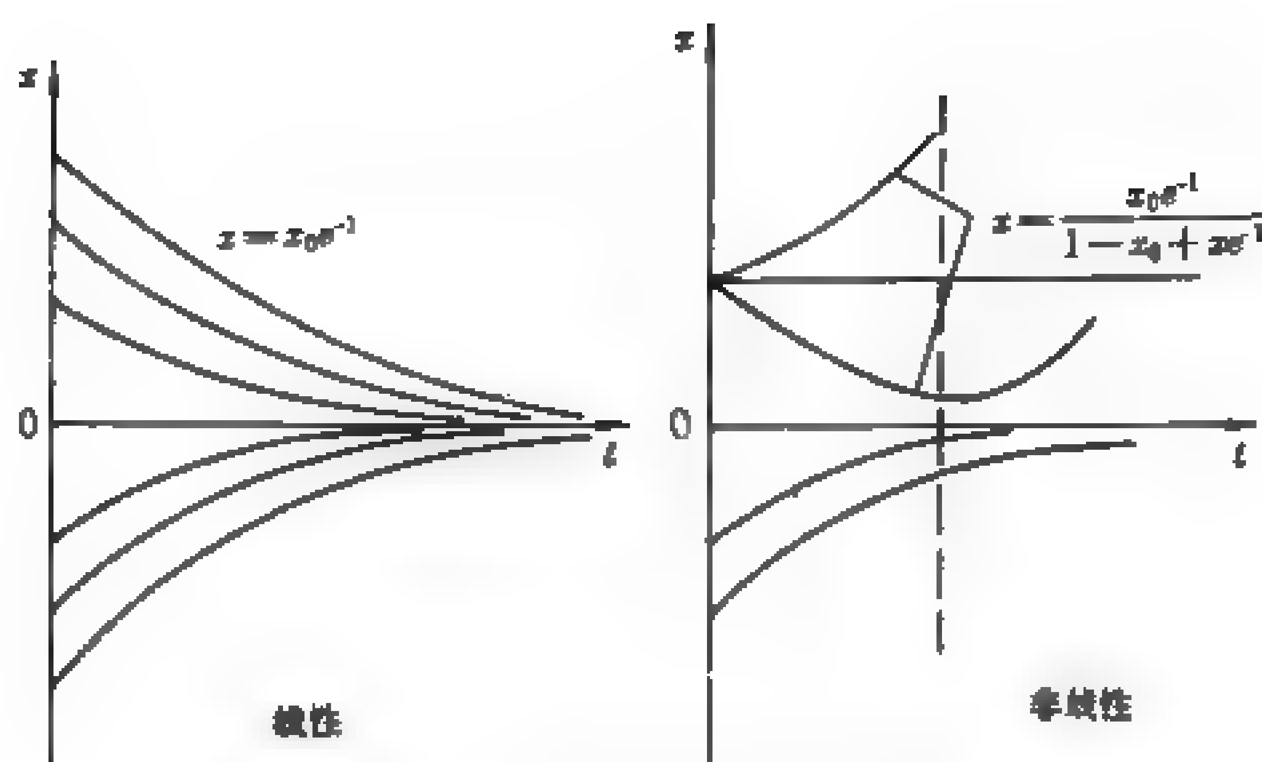


图 7-5　线性系统和非线性系统解的不同特征

非线性运动方程的运算规则，也有着和线性系统截然不同的性质。在线性系统中，两个环节串联后的输出，是输入的拉氏变换乘以两个环节的拉氏变换之积，在运算过程中，两个环节运算次序是可以交换的。但对于一个非线性环节，例如输出等于输入量的平方，则此环节和以 $1/(s+2)$ 为传递函数的线性环节之间的运算次序就不能交换。因为不同的次序会有不同的结果。这样线性系统的分析方法，如传递函数法、频率特性等理论对非线性系统已不再适用。对非线性系统尚无完整的解决方法。往往只能针对特殊情况作特殊处理，其基本想法还是把它线性化。

非线性系统在理论上和实际上都较难处理，常常把它分为两部分，一为线性环节，一为非线性环节。这样便于处理。下面介绍几种常用的典型非线性环节及其图形表示。

(1) 阈值反应

输入 f 要达到一定的振幅 $\delta(>0)$ 之后，才有输出，即

$$y=\begin{cases}0, & |f|\leq\delta\\ f, & |f|>\delta\end{cases} \tag{7.1.22}$$

见图 7-6(A)。如一个自来水龙头在将关而未关之际，水滴积累重

力超过了表面张力，水滴即下落。新的一滴水又开始积累。

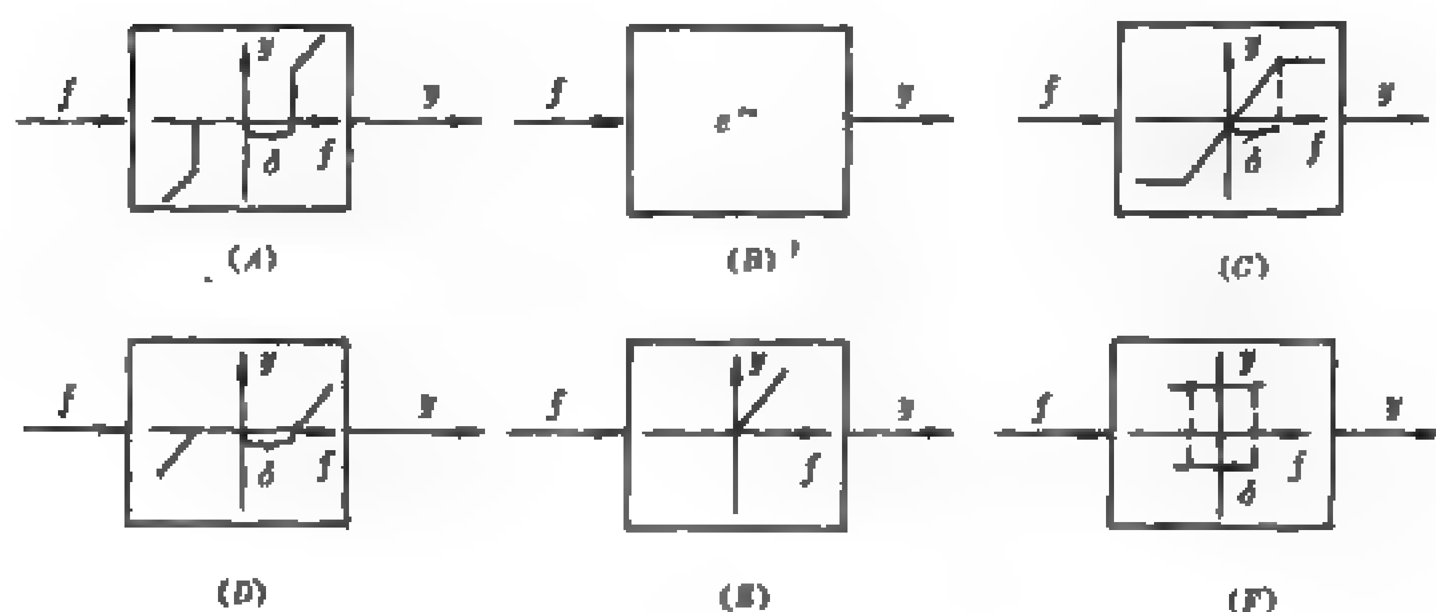


图 7-6　几种常见非线性环节的方框示意图

(2) 潜伏期反应

某些系统反应有一定的潜伏期，即反应需延迟时间 τ 后才开始：

$$y=\begin{cases}0, & 0<t<\tau \\ f(t-\tau), & t\geq\tau\end{cases} \tag{7.1.23}$$

其方框图表示可借用传递函数的形式，即可在方框内写作 $e^{-\tau s}$，见图 7-6(B)。许多传染病都有一个潜伏期。

(3) 饱和反应

$$y=\begin{cases}-K\delta, & f<-\delta(\delta>0) \\ Kf, & |f|\leq\delta \\ K\delta, & f>\delta\end{cases} \tag{7.1.24}$$

见图 7-6(C)。

(4) 不灵敏区反应

例如生理反应中的不应期

$$y=\begin{cases}y(f), & f>\delta \\ 0, & f\leq\delta\end{cases} \tag{7.1.25}$$

见图 7-6(D)。

(5) 整流反应

删去输入中 $f\leqslant 0$ 的部分，即

$$y=\begin{cases}0, & f<0\\ f, & f\geq 0\end{cases} \tag{7.1.26}$$

见图 7-6(E)。

(6) 有迟滞的继电特性：如图 7 6(F)所示。

总之，非线性系统是非常难以处理的。一般来说，没有统一的解决方法，对于偏离线性不远的系统，常常通过线性化来了解其性态。下节讨论对于处于混沌状态的非线性系统的控制问题。

第二节　混沌控制的途径和方法[2][3]

混沌现象是非线性系统的普遍属性，它包含着极其丰富的信息，诸如各种周期态与非周期态，其图样华美多彩，巧夺天工，不是艺术胜似艺术，引起了人们极其广泛的浓厚兴趣。于是，从应用的角度设想，用很简单的非线性元件，来产生复杂而有用的功能。如利用混沌现象在时间、空间上及功能上的多样性作为特殊的信息源，用于信息存储及通讯等目的，也可作为特殊信号发生器产生有用的周期信号。但是混沌奇怪吸引子内的轨线（或信息）是高度不稳定的，瞬息万变，难以捕捉，因此即使信息存储下来，也会改变，往往难以重复识别，如不加以控制，根本无法应用。因此，长期以来在电子工业及众多的其他技术领域中，人们尽量回避混沌行为，并设法抑制混沌的出现。随着对混沌研究的深入及应用的需要，人们渐渐地重视如何控制系统的混沌运动，并使之转变为周期运动的问题，得到了一些很好的结果。进入 90 年代以来，Ott 等人提出的 OGY 控制混沌的方法受到广泛关注，有关控制混沌的其他成果也不断发表，而且在一些实例中得到很好的应用。下文就一些典型有效的混沌控制的方法与技术作一介绍。

一、混沌控制的 OGY 法及其推广形式

1. OGY 控制法

OGY(E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke)[4]法是第一种比较有效地控制混沌运动的方法，它建立在混沌吸引子中镶嵌有无数个

不稳定的周期轨道的理论基础上，利用混沌运动对很小的参数扰动敏感和混沌运动的遍历性，给混沌运动系统一个较小的参数扰动控制量，把系统运动状态控制到某一周期轨道(不动点)。

我们用一个二维离散的混沌系统来说明OGY方法的实现过程：

$$x_{n+1}=F(x_n,p) \tag{7.2.1}$$

p 是系统参数。$x\in R^2$ 是系统状态。控制参数 p 可以在 p_0 附近变化，若令 $p_0=0$，当参数 p 从 p_0 变到 p 时，则不动点 $x_f(p_0)$ 变到 $x_f(p)$：

$$G=\frac{\partial x_f(p)}{\partial(p)}\bigg|_{p=0}\approx\frac{[x_f(p)-x_f(0)]}{p} \tag{7.2.2}$$

在不动点 $x_f(0)$ 附近对式(7.2.1)描述的混沌系统线性化(参数 p 也很小)，得到一个映射

$$x_{n+1}-x_f(p)=M[x_n-x_f(p)] \tag{7.2.3}$$

M 是 $2*2$ 的 Jacobi 矩阵，用 r_u 和 r_s 代表 M 的不稳定和稳定的特征值，$|r_u|>1>|r_s|$。在系统模型不知道的情况下，可以通过实验数据来确定 $x_f(p)$，M，G，r_u 和 r_s。$ME_u=r_uE_u$，$ME_s=r_sE_s$，E_u、E_s 是 M 的不稳定和稳定的单位特征向量，F_s、F_u 代表与之正交的向量，即 $E_uF_u=E_sF_s=1$，$E_uF_s=E_sF_s=0$。式(7.2.3)可以表示为：

$$x_{n+1}-x_f(p_0)=[r_uE_uF_u+r_sE_sF_s][x_n-x_f(p_0)] \tag{7.2.4}$$

由式(7.2.2)，可把式(7.2.4)改写为：

$$x_{n+1}=pG+x_f(0)+(r_uE_uF_u+r_sE_sF_s)(x_n-pG-x_f(0)) \tag{7.2.5}$$

式中 p 在0附近变化，通过 p 的扰动使 x_{n+1} 落在不动点 $x_f(0)$ 附近的稳定流形上，即 $F_ux_{n+1}=0$，

$$p=\frac{(1-r_u)F_ux_f(0)+r_uF_ux_n}{(r_u-1)F_uG} \tag{7.2.6}$$

因为 p 与 x_n 有关，每步迭代要计算 p，控制由调节 p 的值来实现，使混沌系统的状态稳定到不动点 $x_f(0)$。为使式(7.2.2)成立，需 $|p|<p^*$，p^* 充分小，如 $|p|>p^*$，令 $p=0$，这时系统再次进

人混沌运动状态，由混沌运动的遍历性，系统的状态将再次回到 $x_f(0)$ 的邻域，控制系统重新启动。图 7-7 说明了 OGY 方法的实现过程。其中

(A)为第 n 次的迭代 x_n 落在不动点 $x_f(0)$ 附近；

(B)扰动参数 p 值把不动点 $x_f(0)$ 移到 $x_f(p)$；

(C)第 $n+1$ 迭代使 x_{n+1} 落在不动点 $x_f(0)$ 的稳定流形上，一旦达到后便撤消微扰。

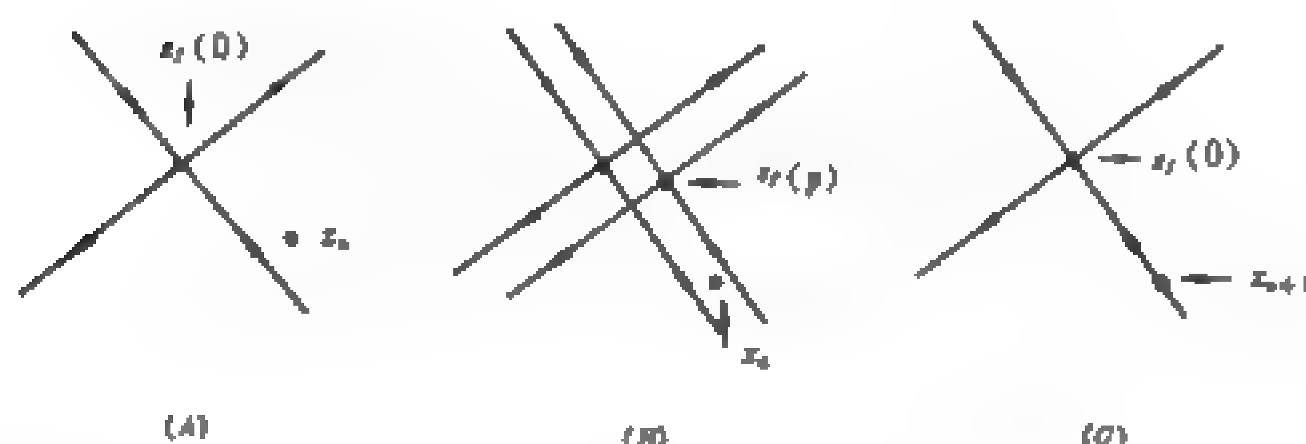


图 7-7 OGY 方法的实现过程

E. Ott 等人用这种方法稳定了 Henon 系统中的周期 1 的轨道。对 Henon 映射：

$$x_{n+1}=A-x_n^2+By_n \tag{7.2.7A}$$

$$y_{n+1}=x_n \tag{7.2.7B}$$

取 $B=0.3$，并假定量 A 能对某个值 A_0 作微小的变化，即 $A=A_0+p$，p 为上面所说的控制参量。A_0 对应于一个混沌的并含有一个不稳定周期 1 的轨道的映射。

Ditto 等人进行了把 OGY 法用于控制重力场中弹性磁条混沌运动的实验，验证了 OGY 方法的有效性。他们选择了带状磁弹体在磁场作用下的微扰实验，观察其刚性变化。实验表明，当磁场较弱时，磁弹体直立着(刚性较强)；当磁场强度逐渐增强时，刚性减小，弹性增大，带状磁弹体开始软缩；磁场继续加大时，磁弹体便进入混沌状态。通过选择一条特定的周期轨道，当这条磁弹体的振

动频率接近该轨道时，就给磁场一个小的扰动，并适当地调节这个微扰量，则可看到磁弹体驯服地在所需的周期态下振动；一旦微扰撤消，混沌再次产生。

OGY 方法是基于混沌奇怪吸引子有着极其稠密的不稳定周期轨道。混沌控制的首要任务就是设法把其中任一条所需的周期轨道挑选出来，并加以稳定的控制。为此，他们选择非线性系统中实际上易于测得和可调节的一个参数，并认为所有其他的周期轨道都是该参数的函数，而与其他的参数无关。为了实现对某个特定的周期轨道（即不动点）的稳定控制，必须在系统靠近不动点时，对参数值进行微扰，随时间适当调整微扰量，迫使所选的轨道向不动点移动，利用对参数所允许的最大扰动量，经过多次反复调整，最终使所需的周期轨道稳定住。

OGY 方法可以推广到 n 维非线性映象，或可以由 Poincaré 映象描述的连续非线性系统。该法无须知道系统全局的动力学模型，非线性映象可以利用时间延迟坐标法，从实验测得的时间序列中构造出来，然后通过考察所期望轨道附近的映象迭代，由该映象在所需的周期轨道附近的线性控制律来达到稳定控制。同时，该法每次映象迭代所需的计算量及所需的参数变化都很少，只需粗略估算所需的不稳定不动点的某些性质，即在特征值及特征矢量测量不精确的情况下可以实现混沌控制，而且在延迟坐标下达到控制后，嵌套在混沌吸引子中的不稳定轨道只有微小变化。它的不足之处是只适用于离散动力学系统及可用 Poincaré 映象表征的连续动力学系统，通常只能控制低周期轨道。为此，对 OGY 控制法又有了一系列改进。

2. OGY 与线性反馈

从控制理论角度来讲，OGY 控制混沌的方法实际上是一种线性反馈。对于离散系统

$$z_{i+1}=F(z_i,p) \qquad (7.2.8)$$

以 $z_f(p_0)$ 代表不稳定的不动点。$|p-p_0|<\delta$，在 $z_f(p_0)$ 邻域内线性化，得：

$$z_{i+1}-z_f(p_0)=A[z_i-z_f(p_0)]+B(p-p_0) \quad (7.2.9)$$

其中

$$A=\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{p=p_0,z=z_f(p_0)} \quad (7.2.10)$$

$$B=\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{p=p_0,z=z_f(p_0)} \quad (7.2.11)$$

令 p 是 z_i 的线性函数

$$p-p_0=k^T[z_i-z_f(p_0)] \quad (7.2.12)$$

调整 k^T 的值使系统稳定，把(7.2.12)代入(7.2.9)

$$z_{i+1}-z_f(p_0)=(A+Bk^T)[z_i-z_f(p_0)] \quad (7.2.13)$$

令 $\delta z_i=z_i-z_f(p_0)$，则上式变为

$$\delta z_{i+1}=(A+Bk^T)\delta z_i \quad (7.2.14)$$

由经典控制理论，如果 $U=[B,AB,\cdots,A^{n+1}B]$的秩为 N，则系统可控。这时对于给定的矩阵 A,B，总可以通过调节 k，使 $A+Bk^T$ 具有指定的特征值。只要 $A+Bk^T$ 的特征值的绝对值小于 1，就可以控制系统。OGY 法相当于在极点配置时把 $A+Bk^T$ 所有不稳定的特征值 r_u 配置为 0，而稳定的特征值 r_s 不变。只要满足 $|r_u|<1$ 的条件即可。

二、偶然正比反馈技术(OPF)技术

OGY 法要求系统的参数变化不能超过一定的允许范围，否则经微扰后系统的局部动力学行为被畸变，微扰量也限于比较小才能稳定控制较低周期的轨道，通常只能控制到周期 1,2,3，更高周期的控制受到噪声的影响而难以达到。为了提高对混沌吸引子中高周期轨道的有效控制，B. Peng，V. Petrov 和 K. Showalter，以及 E. R. Hunt 分别提出了偶然正比反馈技术(OPF 技术)[6][7]，前者应用于由三个联立方程描述的化学反应系统，后者先应用于二极管共振器系统，后又应用于激光系统都取得了成功。

OPF 技术是一种分析技术，我们用图 7-8 来阐明。该系统为一系列 P N 结矫正器及电感所组成的二极管共振器。共振器采用

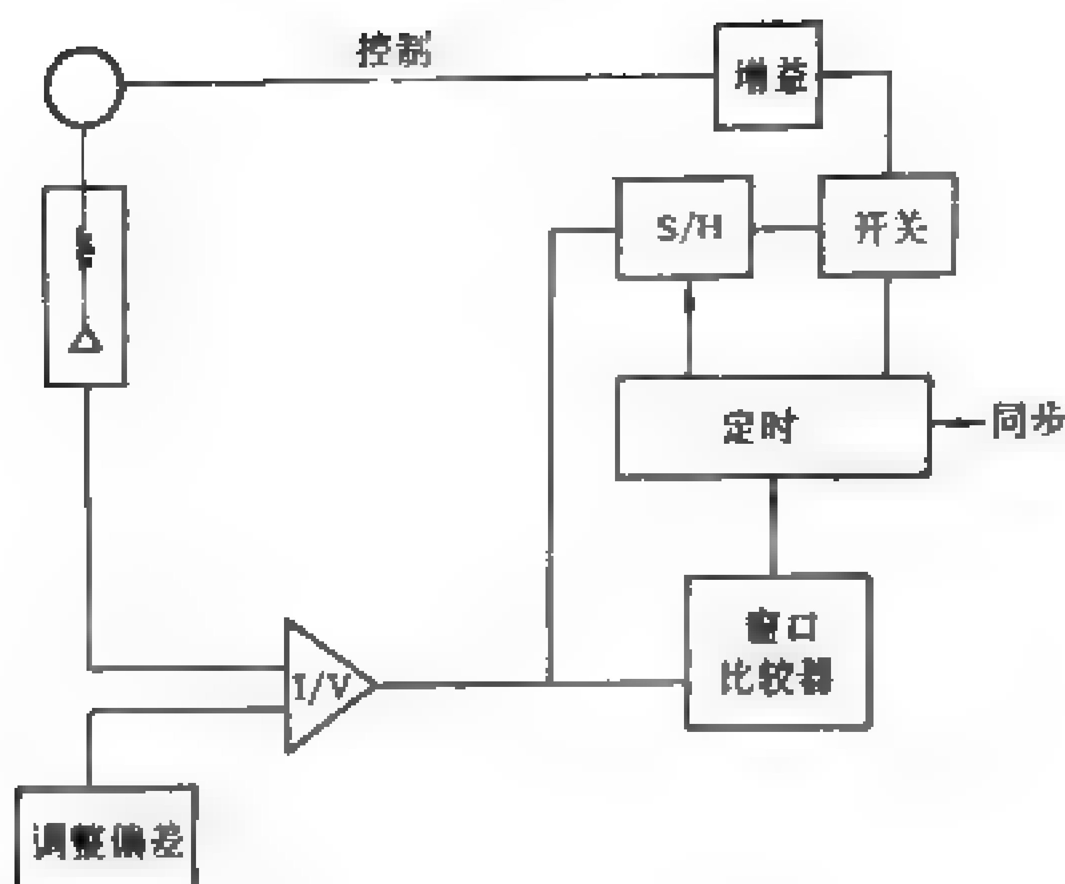


图 7-8　二极管 OPF 控制混沌示意图

一个 1N2858 型二极管，电感器为 100mH，交流电阻为 25Ω，驱动频率为 53kHz，I/V 为一个电流-电压转换器，S/H 表示采样/保持两种交替作用。窗口比较器是所谓限制微扰量的开窗口办法。二极管输出的峰值电流 I_n 作为系统的混沌变量，当输入正弦电压随时间增加来驱动系统时，则将出现倍周期增加通向混沌的道路。它们可以用二维映象来描述。对峰值电流 I_n 采样，如果 I_n 就在窗口所允许的电流值的范围之内，则受驱电压由正比于 I_n 和窗口宽度的电流所调制。若 I_n 不落在窗口之内，则过调制信号最大的修正正比于窗口的大小及系统的增益。一旦 I_n 在窗口之内，系统就采样，并产生增益，最后反馈到系统中去控制。适当改变增益和窗口大小就可以实现对系统中混沌的某个周期信号的稳定控制。显然，从原理上讲这也是一种依赖于时间的小微扰方法，所以对于较低周期的控制本质上与 OGY 方法差不多，也是基于在不动点邻域内的线性化。考虑由 $x_{n+1}=f(x_n,p)$ 描述的混沌动力系统，在不稳定的不动点 $x_f(p)$ 的邻域内线性化，可得

$$x_{n+1}(p)=f[x_n-x_s]+x_s(p) \qquad (f>1.0) \tag{7.2.15}$$

p 是系统参数，$f=\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=x_s}$ 是映射斜率，给 p 一个扰动 δp，

$$x_{n+1}(p+\delta p)=x_s(p+\delta p)+f[x_n-x_s(p+\delta p)] \tag{7.2.16}$$

$$x_s(p+\delta p)\doteq\left(\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}p}\right)\delta p+x_s(p) \tag{7.2.17}$$

把 p 变到 $p+\delta p$，使下一次迭代系统回到 x_s，即

$$x_{n+1}(p+\delta p)=x_s(p) \tag{7.2.18}$$

得到

$$\delta p=f[x_n-x_s(p)]/[(f-1)\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}p] \tag{7.2.19}$$

这就是求得的控制规律。

但是，对于高周期轨道的控制，OPF 技术允许有足够大的微扰，比如对二极管例子，驱动电压变化±10%时，仍可以达到控制，可在 20 微秒之内实现对高达周期 23 的稳定控制。

由此可见，OPF 技术具有很大的优点，它不仅只需小微扰就很容易控制低周期态，而且通过调整信号限制窗口的宽度及反馈信号的增益量，能够有效地控制很高周期的轨道。虽然由于微扰量较大时，有可能改变吸引子的结构。被稳定下来的周期轨道不一定都在吸引子上，这一点使混沌系统更有希望被稳定下来。OPF 法能稳定吸引子高周期的不稳定轨道这一点十分重要，因为高周期的轨道能访问吸引子中更多的区域，不同的区域对应系统不同的物理状态。OPF 法对控制复杂的不知其机制的系统比较适用。因而，OPF 技术广泛应用于许多实际系统，例如 Josephson 结的网络系统，化学湍流系统，生物及激光系统等。

下面简单介绍应用 OPF 技术实现对自治的高维激光系统从实验上稳定控制混沌的方法。图 7-9 所示激光系统及 OPF 控制的示意图。其实验主体是一个二极管激光器，它由一个固态 Nd：YAIG 系统所泵浦。Nd：YAIG 包含一个约 3cm 长的双晶体。该激光系统不能用二维映象来描述，它是一个典型的总体耦合的非线性振荡器，每个纵模都与所有的其他振荡器相耦合的松弛非线

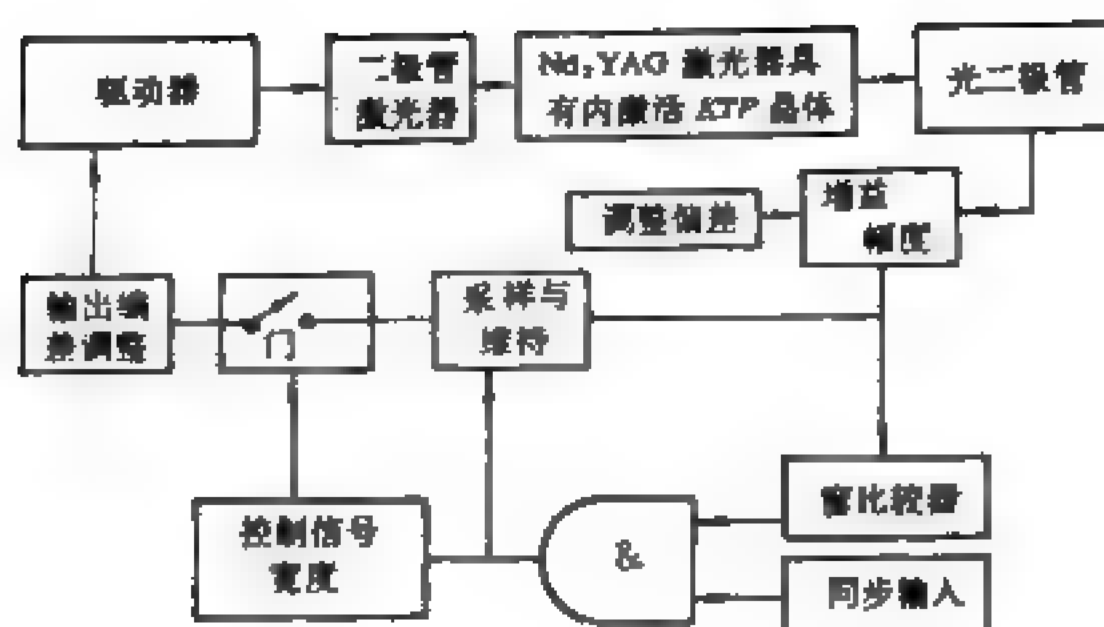


图 7-9　激光系统及 OPF 法控制示意图

性振荡，因而采用 OPF 技术来控制。对该激光系统的一个给定的旋转方向，用 60mW（高于阈值 3 倍）去泵浦，可以观察到混沌吸引子出现 5 至 10 个纵向模，这取决于晶体的旋转方向及激光腔的长度。该激光系统是自治混沌激光系统，所以不加任何调制信号，主要观察系统的自然周期特性即系统的松弛振荡特性，采样频率与系统的松弛振荡频率有关。光二极管用来测量 1.06μm 的辐射，把它的输出作为控制线路的输入信号，用一个稳定振荡器来产生同步频率。用该频率去采样混沌输出信号，在激光信号上加一个变量补偿器，以便把信号引入窗口比较器内。只有当输入信号波形在所允许的窗口宽度之内时才被采样，且只有当被采样的信号的周期比同步信号的时间短的时候，被采样信号才能通过门输入，典型的周期时间为 10μs。由具有对信号补偿及增益作用的放大器对二极管激光器的驱动器给予控制信号。调节波形的失谐度及窗口宽度，可以达到对混沌的控制，获得激光强度的许多高周期波形，如图 7-10 所示，可看到稳定控制了周期 9。在实验中发现，必须把同步频率调整到是松弛振荡频率的简单有理分数，才便于控制。对高周期轨道，当微扰达到 10%时，对原来的吸引子有所影响。对于低周期控制，微扰为百分之几，对吸引子几乎没有什么影响。

OPF 技术的优点是控制器所需的信息可直接从测量混沌行为得到，能快速控制混沌。美国海军实验室的一个小组基于 OPF

技术开发出一种跟踪法，跟踪不稳定的周期轨道或恒定态，从而拓展了混沌控制的范围。这种 OPF 法的一种变型应用于激光系统取得了很大的成功，已经把激光装置的功率输出提高了 15 倍。展示了混沌控制的诱人前景。

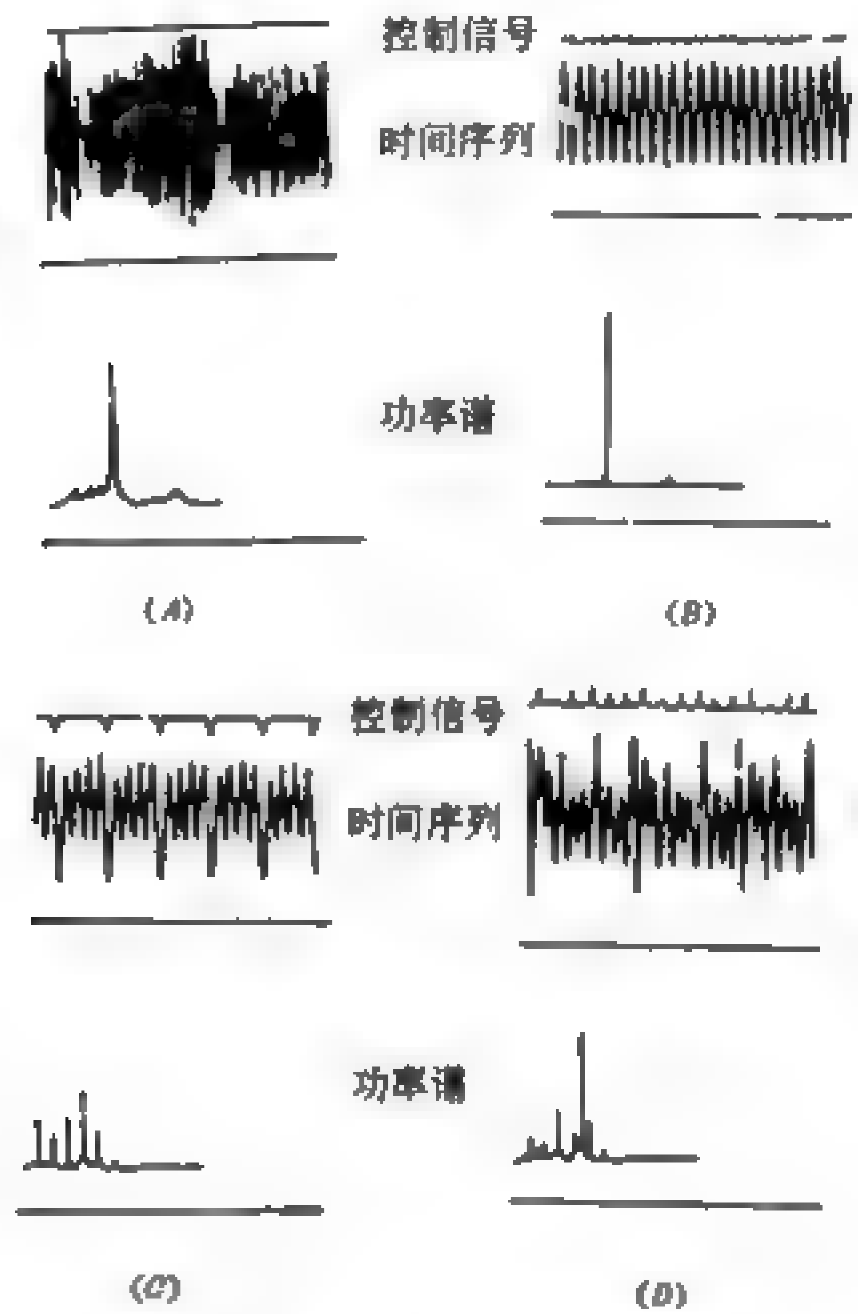


图 7-10 OPF 技术对激光信号的控制

三、混沌的连续控制方法

需要指出，OGY 方法实际上只适用于离散系统及可以把连续系统转化为离散系统的情况。如从数学上用一种特定的平面，Poincaré 截面法把连续的动力学系统退化为非线性映象，往往还要预先用计算机对系统的动力学行为进行必要的分析以获得有关数据，如不动点的位置及相应的参数值，只有这样才能有的放矢地进行控制。因此以上方法在实际应用中有一定的限制，只能稳定满

足要求的某些特定周期轨道，即它们的 Lyapunov 指数小于参数变化之间的时间间隔的倒数。而且，由于系统中参数之间关联很少，变化又很小，所以由于系统的涨落和环境噪声的影响，不可避免地导致系统中偶然地出现突变行为，从而使所选取的某个周期轨道远离所期望的周期轨道。对于大噪声情形，这类突变行为实际上经常发生。因此限制了 OGY 方法及其改进方法的使用范围。为了克服上述缺点，1993 年 K. Pyrogas 提出了两种连续控制混沌的方法：外力-反馈控制法及延迟自反馈控制法。其基本思想都是考虑混沌系统的输出与输入信号之间的自反馈耦合。前者从外部注入周期信号，后者把系统本身输出的信号取出一部分并延迟一段时间后再反馈到系统中去，两法均可实现对混沌系统中的周期信号的连续控制。原理如图 7-11 所示。

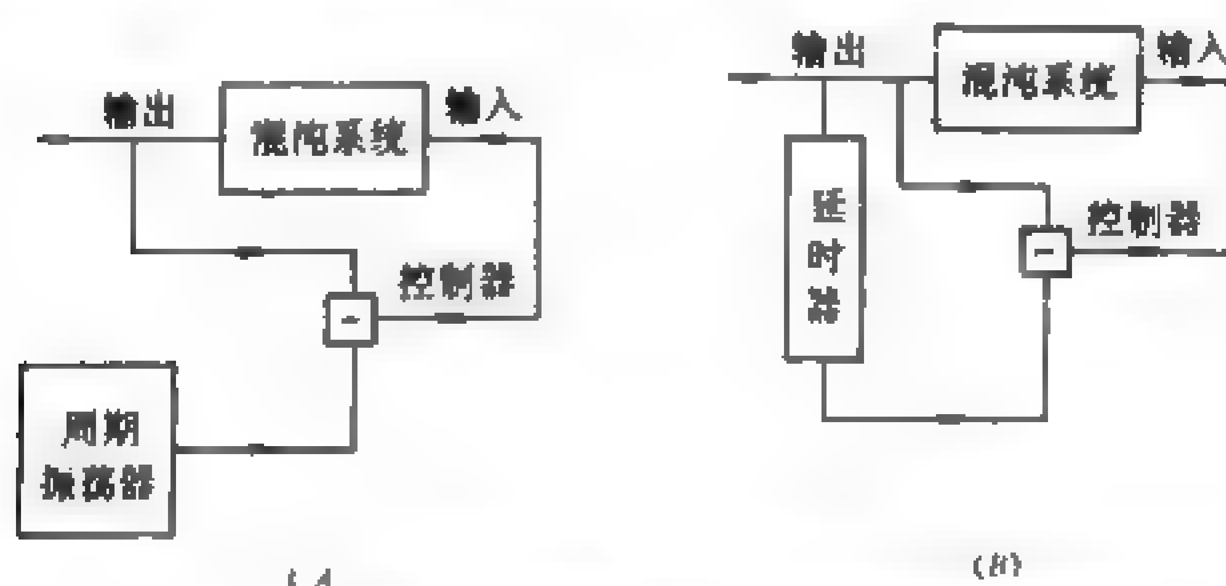


图 7-11 (A) 外力控制法示意图 (B) 延迟反馈控制法示意图

1. 外力-反馈控制法[6]

假设非线性连续系统的动力学可以由一个非线性常微分方程组来描述。系统的具体动力学模型并不要求知道，但从实验上可以测得系统的某个输出量。外力反馈控制法的特点就是，当无扰动的系统存在混沌时，从外部给系统输入一个强迫信号，用以与系统的输出量进行比较。并给出控制信号作为对系统的一种微扰。当然无微扰时的系统必须存在混沌奇怪吸引子，只有这样才有可控制的无穷多的周期轨道或非周期轨道。利用所谓延迟坐标的标准方法，可以从混沌奇怪吸引子内大量的不同周期的不稳定轨道中提

取一个标量信号，于是可以从实验测到的时间延迟的时间序列数据中确定各种不同的周期信号，它们相应于不同的不稳定周期态，据此，我们再调节外力微扰量，使欲控制的信号与外部输入信号适当匹配，就可以提取所需的各种正比信号。此技术要求很高，原则上要能产生无穷多的周期信号，以达到控制的目的。

通常考虑如下时间连续的混沌动力系统：

$$\frac{dx}{dt}=Q(x,y) \tag{7.2.20A}$$

$$\frac{dy}{dt}=P(x,y)+F(t) \tag{7.2.20B}$$

其中 y 是某一可测得的输出量；矢量 x 描述系统的其余变量，它们或者是测不到的变量或者是不令人感兴趣的变量；$F(t)$是输入控制量。当 $F=0$ 时系统具有混沌奇怪吸引子，从实验可测得多种周期信号。选择某个周期信号 $y_i(t)$，另设计一个特殊外部振荡器，它能产生我们所要的各种周期信号，或者能正比于 $y_i(t)$。调节信号源中某个信号 y_i 输入系统，让它与系统的输出信号 y 比较之后，再以一定权重因子 k，反馈到系统中。通过调节 k 及信号差 Δy，即反馈信号

$$F(t)=k[y_i(t)-y(t)]=k\Delta y \tag{7.2.21}$$

可达到对混沌中所需周期信号的稳定控制。这里 $k>0$ 为负反馈，$\Delta y=y_i-y$。当 $y_i=y$ 时，这种控制并不改变原来的混沌特性，当获得稳定控制时，$y_i=y$，$F(t)$变得非常小。这表明只要利用一个小小的外力微扰即可达到稳定混沌中不稳定周期的目的。从这个意义上说，外力控制法与 OGY 方法类似。前者靠外力信号扰动，而后者靠对系统的某个参数扰动，都达到了同样的效果。

OGY 法与外力控制法明显的不同在于，在 OGY 法中只能在系统状态接近所需的周期态(或称不动点)时，才能对参数进行微扰。这是因为 OGY 方法的要害是在不动点附近的偏差采用了线性近似处理，所以不适用远离不动点的微扰。外力控制法则完全不受此限制，它无须等待轨道接近不动点，可以在任何时候加入微扰来控制。甚至初始条件远离周期轨道时亦然，只要能使系统与外部

振荡器同步就行。

2. 延迟反馈控制法

为了克服外力-反馈控制法中必须专门设计研制特殊振荡器的技术困难，提出了延迟反馈控制法。其主要思路是，利用系统输出信号的一部分经过延迟时间反馈到系统中去，以此代替外部输入。它的做法与上法类似，但是主要技术关键在于延迟线(器)的性能。它应该有很宽的时间调节范围，这样才能稳定控制较高周期的信号。当延迟时间选为所需的周期时，通过调节反馈因子 k 以及延迟信号与输出信号的差值，就可以达到上法的相同控制效果。

对于如式(7.2.15)的时间连续的混沌动力系统。y 是某一可测得的量，$F(t)$ 是输入控制量。此时微扰形式为：

$$F(t)=k[y(t-\tau)-y(t)] \tag{7.2.22}$$

即用 $y(t-\tau)$ 来代替外部输入信号 $y_i(t)$，τ 是滞后时间长度，此时如果 τ 恰为某一不稳定周期轨道 T_i，当系统状态沿着这条轨道运行时，$y(t-\tau)=y(t)$，此时有 $F(t)=0$。当 $y(t)$ 刚离开这条轨道时，$y(t-\tau)$ 还在这条轨道上，控制输入量 $F(t)$ 对系统进行控制，调节 $y(t)$ 回到这条轨道。k 的值可以借助 Lyapunov 指数的计算来帮助确定，那些对应最大 Lyapunov 指数不大于零的 k 值可以使系统控制稳定到所需的轨道上。$F(t)$ 幅值的大小与重构的周期轨道的精度、稳定性和噪声干扰的大小有关。Pyragas 和 Tamasevicins 设计了一个电子线路实验来验证延迟反馈法，见图 7-12。该线路中混沌系统为一个外部周期驱动的非线性振荡器，主要由负阻的隧道二极管及电感器等组成。线路参数如下：$L=17.4\mu H$，$C=510pF$，$R=5.1k\Omega$，外部驱动频率 $f_{ex}=3.8mHz$，驱动幅度 A 可变，最大值为 3V，交流偏压为 $U<70mV$，采用锗隧道二极管，峰值电流为 $I_p=1.5mA$，峰值电压 $U_p=67mV$。

可以用下列方程描述该振荡器的动力学性质：

$$dx/dt=-y+C \tag{7.2.23A}$$

$$du/dt=-x-bN(y)-dy+a\sin\omega t+F(y,c) \tag{7.2.23B}$$

在无控状态下，$F(y,c)=0$，上述无量纲变量和参数为：

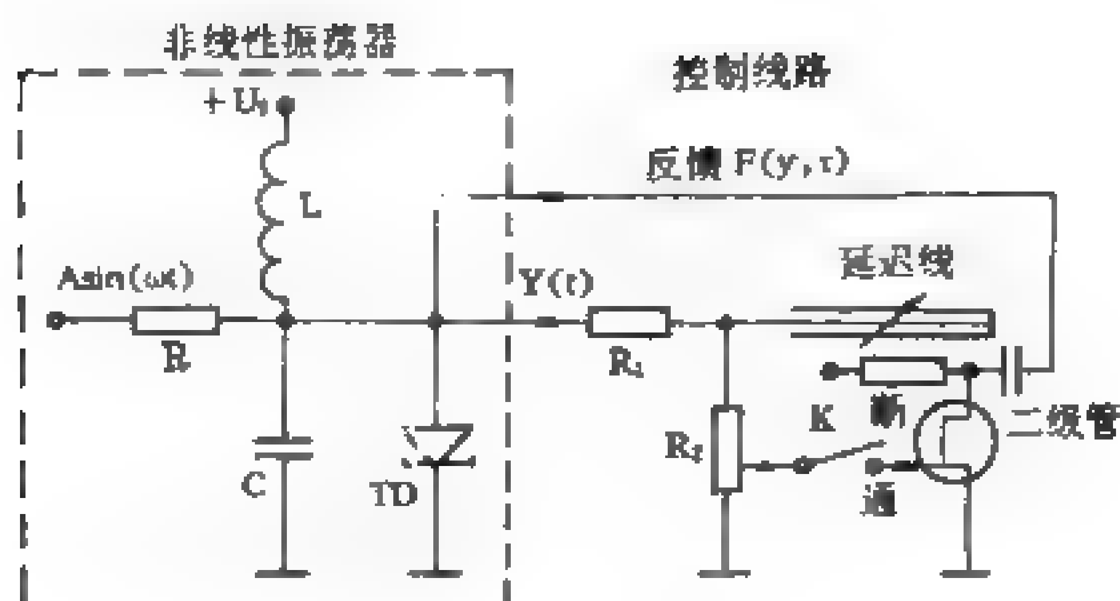


图 7-12 延迟反馈法实验线路

$$x=ZI/U_p, Y=U/U_p, t=t/T_0$$

$$F=ZI_C/U_p, Z=\sqrt{L/C}, T_0=\sqrt{LC} \qquad (7.2.24)$$

$$a=ZA/(RU_p), b=ZI_p/U_p, c=U_0/U_p$$

$$d=Z/(R\parallel R_C), W=2pf_{ex}T_0, T=2p/W$$

这里 U_p 为电容两端电压，I 为通过电感的电流，I_C 为控制电流，R_C 为负阻电阻。利用图 7-12 实验可实现对不稳定周期的稳定控制，关键是有一个可调的延迟线满足对不同周期的时间延迟要求，图 7-13 给出了用时间延迟反馈法对周期 5 的稳定控制（功率谱表示）。

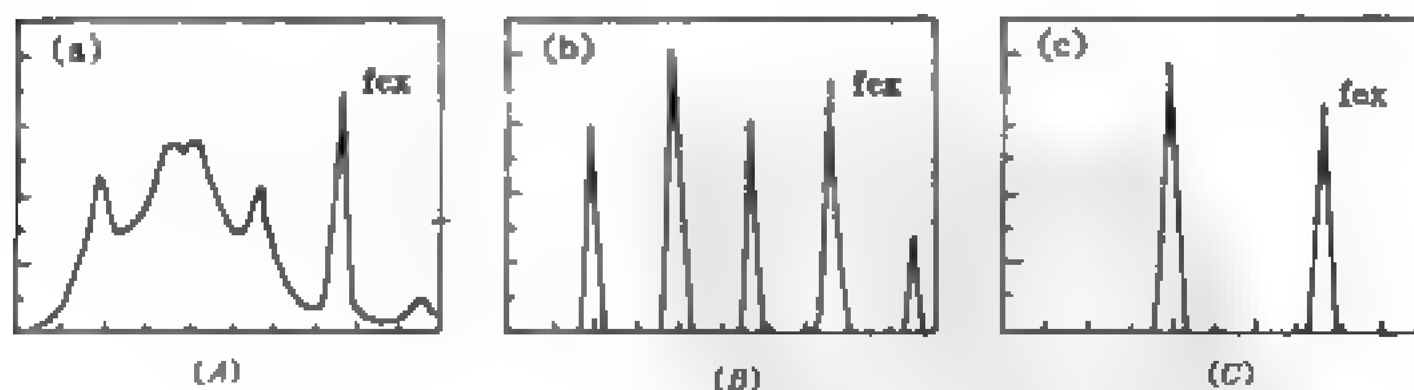


图 7-13 延迟反馈法的控制结果

可以看到图(A)为无控时振荡器处于混沌态，具有宽广的功率谱，图(B)，(C)在受控后分别获得对周期5及周期2的稳定控制，其功率谱对应于周期信号所要求的尖峰。

连续反馈控制法比OGY法更实用。OGY法基于系统在不动点领域内的线性化，只有系统状态落在这个领域内，控制系统才能启动，而且连续反馈控制法中控制信号的大小也不受限制，这比OGY法更方便。我国原子能科学研究院非线性研究组方锦清研究员等也成功地应用延迟反馈法对非线性环形腔激光系统的混沌控制进行了比较系统的理论研究，并在半导体线路的实验中看到了对低周期的控制效果，初步摸索了实验的条件及技术关键，为实现较高周期的控制打下了基础。屈知林教授等对上述连续反馈法在多变量时作了研究，并应用于Lorentz及Duffing系统。计算表明：在多维系统动力学中只对一个变量进行反馈控制是不充分的。在一些情形下，要实现对多维系统的混沌连续反馈控制必须用一个以上的变量才是有效的。因此，在应用连续反馈控制法时，要从不同周期稳定控制所能达到的Lyapunov指数的稳定范围内寻求有效的控制。本法还可以拓展应用到混沌同步，即对非周期轨道的控制。

四、自适应控制法

自适应控制混沌运动是根据自适应控制原理发展而来的，是由B. A. Huberman[9]等提出的，S. Sinhua[10]和Guemz等进一步发展了这种方法。它是通过参数的调整来控制系统，使其达到所需要的运动状态。前述的OGY等方法基于对系统的参数进行时间微扰反馈，达到控制某些不稳定的周期轨道之目的。这就要求找到一个合适的系统参数可以进行微扰调整。但是，实际上并非所有的非线性系统都能找到可调的合适参数。诸如生物系统、化学系统等等很难找到它们的合适的可调参数。因而人们考虑能否改变系统变量来获得所需的动力学行为。答案是肯定的。自适应控制法就是通过参数的调整来控制系统所需要的运动状态。由目标输出与实际输出之间的差来调节参数，使系统从混沌运动状态转变到规则

运动状态。其示意图如图 7-14 所示。

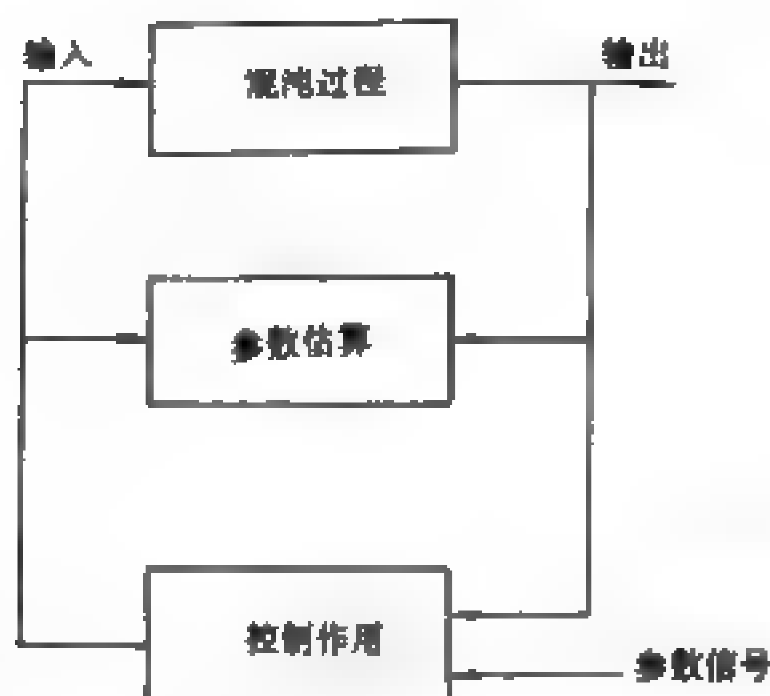


图 7-14　自适应控制法

首先假设所研究的非线性系统产生混沌过程的动力学模型可以被构造出来。其次，用数学上的所谓定量最小二乘法，设计一种参数预估器，使预估器的参数改变与系统的混沌过程无关，但是却能通过改变预估器的参数来实现回归估算动力学模型的参数。然后，利用所预估参数的模型算出对系统的适当输入量，逐次调整，使系统的混沌过程到达所期望的周期信号。只有当它达到所期望的参考信号时，控制器才起作用，从而实现了所需周期信号的有效控制。

对于如下一个 N 维混沌动力系统：

$$\dot{X}=F(X,U,t) \tag{7.2.25}$$

$X=x_1,x_2,\cdots x_N$ 代表系统的状态变量，$U=u_1,u_2,\cdots u_m$ 代表系统参数。控制时另加一个调节 U 值的动力方程，

$$\dot{U}=EG(X-X_S) \tag{7.2.26}$$

X_S 代表目标状态，E 是控制刚度，$\lim\limits_{X\to X_S}G(X-X_S)=0$。S. Sinhua 对如下的 Logistic map 系统

$$x_{n+1}=ax_n(1+x_n) \tag{7.2.27}$$

应用了这种控制方法。具体方法如下：

(1) 在每一步倍增 E 的值；

(2) 用 E 值估计控制方程(7.2.26)的 U 值；

(3) 用 $2E$ 值估计在两个相继步中控制方程(7.2.26)的 U 值；

(4) 比较在(2)和(3)中得到的 U 值；

(5) 如果两值之差小于一个给定的精度，则继续执行(1)；否则，停止上述迭代过程。

结果显示，在以此法控制的头几个脉冲内，系统并不马上变成所需的周期态，有一段短暂的过渡，然后逐渐进入稳定的周期态，通常达到稳定控制所需迭代次数并不多，但为保证收敛和有效起见，常需迭代几万次。分析表明，充分小的 E 能使控制有效地实施，E 与达到控制目的所需时间成反比，但不是越大越好。

自适应控制方法的优点是允许只用系统参数的有限知识去达到满意的工作性能。该法的关键在于控制低维系统的模型，确定论的模型构造对于展现相干的低维动力学行为一直是成功的。但是利用时序重构模型的精度是有限的，它对控制函数的有效性有一个上限。另外，噪声影响，模型误差及系统、模型、控制三者组成的总体系统的稳定性都给自适应控制方法带来一定的限制。

五、周期扰动抑制混沌运动

这里包括两种方法，一是参数周期扰动，另一是周期激振力作用。

1. 周期参数扰动

所谓周期参数扰动法是指通过给参数以特定频率的扰动，把系统的混沌状态转变到规则运动状态。参数扰动通常能使系统离开原来的周期轨道，而适当频率的参数扰动也可能使系统稳定在某一周期轨道上。由此引出，适当的参数扰动也应能减弱甚至消除系统中的混沌运动。通常选一个对系统影响较大，并且易于改变的参数作为激励参数。设这个参数为 c，把 c 用 $(1.0+f\cos\Omega t)$ 来代

替，$f<<1.0$，适当地选取 f,Ω 可使系统稳定下来。

E. Lima 和 M. Pettini[11]用这种方法抑制 Duffing-Homes 振子中的混沌运动。在原 Duffing 方程的 x^3 的系数中加人一个弱周期微扰项，方程变为

$$\ddot{x}-x+b[1+\eta\cos(\Omega t)]x^3=-\delta\dot{x}+\gamma\cos(\omega t) \tag{7.2.28}$$

其中 $\eta\cos(\Omega t)$ 为对 x 的系数的微扰，$\eta<<1$ 是参数微扰的幅度，Ω 为微扰频率，$\gamma\cos(\omega t)$则是对系统的强迫周期项。当 $\eta=0$，即无参数微扰时，系统处于混沌奇怪吸引子状态，一旦加上对非线性立方项 x^3 的系数的周期小微扰，则可以把混沌态抑制掉，进而也可以转换到所需的周期态。实现这种混沌控制的条件是：当微扰频率 Ω 与外部强迫项的频率 ω 发生共振时，则混沌被抑制，周期态也随之获得。已经用 Melnikov 方法及数值方法对此进行了论证。研究表明，当 Lyapunov 指数 $\lambda=0$ 时，混沌行为消失；而当 $\lambda<0$ 时，则系统转变到周期态。

2. 周期激振力作用

所谓周期激振力作用法是通过给系统直接加人扰动项 $f\sin\Omega t$ 来减弱系统的混沌运动。Y. Braiman 用 Jasephson-Junction 系统分析了这种方法[12]。当周期的外力与混沌系统中某一不稳定的周期运动发生共振时，这一不稳定的周期运动得到了加强，而其他不稳定的周期运动被抑制，就使系统呈现出规则运动状态，实现了混沌的控制。

Y. Braiman[12]等通过一维迭代：

$$x_{n+1}=(k+\epsilon f_n)x_n \tag{7.2.29}$$

说明了一个很小的周期扰动对一个不稳定极限环的影响。式中 $k>1$，$\langle f_n\rangle=0$，$\langle f_n^2\rangle=1$(e. g. ，$f_n=\sqrt{2}\cos n$；尖括号表示对所有的 n 求平均)，当 $\epsilon=0$ 时，不动点显然是不稳定的，而当 ϵ 为有限值时上述映象的 Lyapunov 指数 λ 为：

$$\lambda=\mathrm{Re}\langle\ln(k+\epsilon f_n)\rangle \tag{7.2.30}$$

对比较小的 ϵ，则

$$\lambda=\ln k-\epsilon^2/k^2+o(\epsilon^2)k^2 \tag{7.2.31}$$

这样当 $k^2\ln k<\varepsilon^2$ 时，$\lambda<0$。当 $k=1+\delta,\delta<<1$ 时，此条件为 $|k|<(1/2)\varepsilon^2$，x 才是稳定的。值得注意的是，甚至 $\varepsilon^2<k^2\ln k$ 时，外力周期微扰也能有效地减小 λ 值。这已被实验所证实。Lyapunov 指数 λ 从正向负的转变表明：用外部周期小微扰，可以达到稳定控制不稳定周期轨道。

六、传递和转移控制混沌运动

复杂非线性系统的传递和转移控制最早由 Huberler 和 Luscher 提出，并由 E. A. Jackson[12] 对此作了进一步发展。该法是一种无反馈控制法。它是通过开拓产生稳定不动点、极限环及混沌吸引子态空间中自然发生的收敛区域，来达到控制目标。它不仅对连续动力学系统，而且对离散映象都有应用价值。

对于 $\dot{X}=E(X,t)$ 描述的动力系统($x\in R^n$)，加上控制项 $F(g,\dot{g})S(t)$ 得

$$\dot{X}=E(X,t)+F(g,\dot{g})S(t) \tag{7.2.32}$$

其中

$$F(g,\dot{g})=\dot{g}-E(g,t) \tag{7.2.33}$$

当 $t<0$ 时，$S(t)=0$，设 $G(t)$ 是系统状态 $X(t)$ 的控制目标，即有 $\lim\limits_{t\to\infty}|G(t)-X(t)|=0$，这种控制方法基于在相空间中存在收敛域 $C_k(X)$：

$$C_k=\left\{X\left|\frac{\partial E_i}{\partial x_j}-\delta_{ij}\mu(X)\right|=0,\forall\ |u(x)|<1\right\} \tag{7.2.34}$$

所谓传递控制(entrainment control)是引导状态 $X(t)$ 收敛到 $G(t)$，$\{G(t)\}$ 须在收敛域 C_k 中。当系统状态 $X\in BG\{(g)\}$，控制开始。其中

$$BG\{(g)\}=\{X\lim_{t\to\infty}|X(t)-G(t)|=0,t>0\} \tag{7.2.35}$$

要求 $BG\{(g)\}$ 是个凸区域，即如果 $X,Y\in BG$，则 $bX+(1-b)Y\in BG$，$(0\leqslant b\leqslant1)$。如果系统的初态不在 BG 中，系统很可能收敛到其他收敛域中，从而达不到要实现的控制目的。

所谓转移控制(migration control)是在有限的时间内把系统从相空间的某个收敛域控制到其他收敛域中。在多吸引子系统中，

可以把系统从一个吸引子转移到另一个吸引子，此时要求目标 $G(t)|_{t=0}\in C_i, G(t)|_{t=T}\in C_j, i\neq j$。如果 C_i 代表一混沌吸引子，C_j 代表规则吸引子，这样就起到了控制混沌运动的目的。

通常传递和转移控制要联合应用。先把系统状态控制到一个吸引子中，然后再转移控制到所希望的吸引子中。这种控制方法除了要求知道控制时系统的初始状态外，系统的状态在控制实施中不再需要，这是一种开环控制。这种方法不适用于对保守系统的控制。总之，传输和迁移控制方法需要预先详细知道系统的性态，特别是关于态空间的收敛区域，对目标动力学的收敛取决于初始条件，或者传输的流域。因此，它不能任意选择系统的控制目标。

第三节　混沌控制的目标和物理机理

混沌控制的主要任务是，根据不同领域的实际需要，设法从多种多样的非线性系统所产生的混沌行为中，挑选出任意所需的各种周期信号，甚至于非周期信号，并实现其稳定的有效控制。或者可以说，利用非线性系统的特性，通过各种策略、方法与途径，获得人们所需的动力学行为，从而为众多领域的应用提供原理、方法和技术基础。前节已讨论了几种典型的混沌控制方法，本节将简要地探讨混沌控制的目标和物理机理，为各种应用提供一定的理论基础。

迄今为止，对混沌的控制目标主要有下列几种：[14]

(1) 抑制或消除某些类型的混沌；

(2) 稳定控制在混沌吸引子中所期望的不稳定的周期态；

(3) 通过控制达到新的动力学行为；

(4) 消除多重的混沌吸引子流域；

(5) 实现两个或多个相同动力学系统的周期同步、混沌同步及其控制；

(6) 控制混沌吸引子中的非周期态、周期态及其同步的可能应用。

显然，针对不同的目标，必然采取不同的方法。但是，与控制论中的经典控制问题不一样，混沌控制从总体上仍无统一的共同理论框架。但混沌控制在物理机理上有一个共同点，就是变原来的正的 Lyapunov 指数为负值，从而实现从不稳定到稳定的转变。

现行的混沌控制方法的共同点是利用与时间有关的连续小微扰来实现对混沌的稳定控制。当微扰趋于零或无限小时，则达到了所需周期或非周期信号的稳定化。在 OGY 方法中，由于在不动点附近微扰，把所需信号稳定控制住。在外力或延迟自反馈控制法中，引入微扰后使系统的维数增加，以获得稳定所必须的条件。也就是说使表征混沌特性的 Lyapunov 指数从正数变为负数，从不稳定变为稳定，这就是物理机理实质所在。

应当看到，扰动或噪声所起的重要作用，乃是值得注意的一种普适效应，它在自然界中的积极意义越来越被人们所认识。小微扰或小噪声在混沌控制中的妙用及建设性的作用，在前述的几种方法中已经充分显示了出来，小微扰（小噪声）在其中引起了抗混沌效应。事实上几乎所有实际系统无不受到外部环境或内部噪声的影响，这种情形是经常发生的。它在合适的条件下，环境噪声及内部参数扰动（涨落）同样可以引起抗混沌效应，即起到对混沌自控制作用。这实质上揭示了自然界乃至人类社会中一条基本原理，即宇宙万物之所以能够维持其稳定和平衡是与周期环境的微扰密切相联系的。可以说，小噪声或微扰所引起的抗混沌效应是对混沌的一种持久控制因素。

混沌同步的机理与混沌中非周期轨道的控制方法有关。研究指出，混沌同步与协同学中的使役原理具有类似性，按混沌本身特性似乎是抗同步的。但是，近年的实验证实，可以实现同步的混沌电路，是由一个系统去驱动另一个系统，即两个系统耦合起来，前者称为驱动系统，后者称为响应系统。同步定理告诉我们，当响应系统的条件 Lyapunov 指数为负值时，则它将与驱动系统实现混沌同步。这样的混沌同步法及新近拓展的串级混沌同步法都可应用于混沌中的非周期轨道的稳定控制。Haken 在协同学中提出的

使役原理告诉我们，一个系统的行为由长寿命的子系统决定短寿命的子系统，即长寿命者为命运主宰。这样同步定理中的条件，Lyapunov 指数类似于使役概念的一种推广。据此，不难理解把延迟反馈法与同步原理结合起来，便产生了对混沌中非周期轨道的控制方法。至于究竟什么类型的混沌系统可以通过一个变量控制来与它们的过去行为实现同步呢？只有当微扰具有足够大的自由度，以致于可抑制住轨迹在所有扩张方向上发散时，才能达到响应系统所期望行为的稳定化，这是许多动力学模型所研究的结果。

综上所述，从各个不同的角度出发，混沌控制的目标、策略和途径也各不相同，方法类型多种多样，这也正是非线性特性难以预料及出奇制胜的本质所在。混沌控制及其应用研究，目前虽已获得了重要的突破性进展，也可以说人们已逐渐改变了对混沌运动的不稳定性、不可控性及不可靠性的陈见。但必须指出，混沌控制的方法和应用在理论和实验上都还远非成熟。当前，学术界正以高度的热情、扎实的工作，全方位地对这一跨世纪的热点课题进行研究。应该相信科学奥秘的大门总是为勇敢探索者敞开的，今日的艰辛耕耘，在不久的将来，一定会迎来全面丰收的崭新局面。

参考文献

[1] 赵似兰，费尔芬 AA. 控制论和计算机应用于医学，北京：科学出版社，1993，39 页

[2] 方锦清，非线性系统中的混沌的控制与同步及应用前景(一)，物理学进展，1996，16(1)：1

[3] 张辉，吴洪涛，混沌运动的控制，力学进展，1995，25(3)：392

[4] Ott E, et al. Phys. Rev. Lett. 64(1990)：1196

[5] Romeira F J, et al. Physica D. 58(1992)：165

[6] Hunt E R. Phys. Rev. Lett., 67(1991)：1953

[7] Peng B, et al. J. Phys. Chem. 95(1991)：4957

[8] Pyragas K. Phys. Rev. A, 170(1992)：421

[9] HubermanB A, et al. IEEE Trans. Circuit Systems, 37(1990)：547

[10] Sinhua S, et al. Physica D, 43(1990)：118

[11] Lima R, et al. Phys. Rev. A, 41(1990):726
[12] Braiman Y, et al. Phys. Rev. Lett., 66(1991):2545
[13] Jackson E A, et al. Physica D, 44(1990):404
[14] 方锦清,混沌控制及其应用前景,科技导报,5(1994):23